21 ТЕОРІЯ ДЕ-БРОЙЛЯ. РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

21.1 Співвідношення де Бройля

$$W = \hbar\omega, \ \vec{p} = \hbar\vec{k},$$

де W – енергія частинки, що рухається; p – імпульс частинки; $\vec{k}$ – хвильовий вектор; $\left|\vec{k}\right| = k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; $\hbar$ - стала Планка, поділена на 2π.

21.2 Зв'язок між імпульсом *p* частинки, що рухається, та довжиною хвилі де Бройля λ для двох випадків:

а) у класичному наближенні $\left(\text{v} \ll c;\ p = m_0\text{v}\right)$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0\text{v}},$$

де m_0 –маса спокою частинки;

б) у релятивістському випадку $\left(\text{v} \approx c;\ p = \dfrac{m_0\text{v}}{\sqrt{1-\dfrac{\text{v}^2}{\text{c}^2}}}\right)$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0\text{v}}\sqrt{1-\frac{\text{v}^2}{\text{c}^2}}.$$

21.3 Зв'язок довжини хвилі де Бройля з кінетичною енергією W_K - частинки:

а) у класичному наближенні $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2m_0W_K}}$;

б) у релятивістському випадку $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{W_K\left(W_K + 2W_0\right)}}$,

де W_0 – енергія спокою частинки $\left(W_0 = m_0c^2\right)$.

21.4 Фазова швидкість хвилі де Бройля

$$\text{v}=\frac{\omega}{k},$$

де ω - циклічна частота; $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число; λ - довжина хвилі.

Групова швидкість

$$u = \frac{d\omega}{dk}.$$

21.5 Співвідношення невизначеностей Гейзенберга:

а) для координати та імпульсу частинки

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar,$$

де Δp_x – невизначеність проекції імпульсу частинки на вісь x; Δx – невизначеність її координати;

б) для енергії і часу

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar,$$

де ΔW – невизначеність енергії даного квантового стану; Δt – час перебування системи в цьому стані.

21.6 Одновимірне часове рівняння Шредінгера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

де i – уявна одиниця ($i=\sqrt{-1}$); m – маса частинки; $\psi(x,t)$ - хвильова функція, яка описує стан частинки.

Хвильова функція, яка описує одновимірний рух вільної частинки:

$$\psi(x,t)=A\exp\frac{i}{\hbar}(px-Et),$$

де A – амплітуда хвилі де Бройля; p – імпульс частинки; E – повна енергія частинки.

Умова нормування хвильової функції

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(x,t)\right|^2 dV=1.$$

Одновимірне рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0,$$

де E – повна енергія частинки; $U(x)$ – потенціальна енергія; $\psi(x)$ – координатна (або амплітудна) частина хвильової функції,

або в операторній формі

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

У випадку гармонічного осцилятора рівняння Шредінгера має вигляд

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi = 0,$$

де m – маса частинки; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - власна частота класичного гармонічного осцилятора; k – коефіцієнт жорсткості.

Для випадку тривимірної задачі рівняння Шредінгера має вигляд

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0.$$

При розв’язанні рівняння Шредінгера потрібно враховувати стандартні умови, яким має задовольняти хвильова функція: скінченність (у всьому просторі), однозначність, неперервність самої ψ - функції та її першої і другої похідних.

21.7 Ймовірність $d\Psi$ **знайти частинку в інтервалі від** ***x*** **до** ***x+dx*** (в одновимірному випадку) визначається формулою

$$d\Psi = \left|\psi(x)\right|^2 dx,$$

де $\left|\psi(x)\right|^2$ - густина ймовірності.

Ймовірність Ψ знайти частинку в інтервалі від x_1 до x_2 відшукується інтегруванням $d\Psi$ за зазначеними границями інтегрування

$$\Psi = \int_{x_1}^{x_2} \left|\psi\left(x\right)\right|^2 dx .$$

21.8 Власне значення енергії E_n частинки, яка перебуває на n-му енергетичному рівні в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі, визначається формулою

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, ...),$$

де l – ширина потенціальної ями.

Власна хвильова функція, що відповідає цій енергії, має вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n}{l} x .$$

Власні значення енергії гармонічного осцилятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega ,$$

де $n = 0,1,2,3,\ldots$

Енергія нульових коливань гармонічного осцилятора

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega .$$

21.9 Коефіцієнт заломлення $n_з$ хвиль де Бройля на межі низького потенціального бар’єра нескінченної ширини (рис.1):

$$n_з = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1},$$

де λ_1 і λ_2 – довжини хвиль де Бройля в областях *I* і *II* (частинка рухається із області *I* в область *II*); k_1 і k_2 – відповідні значення хвильових чисел.

21.10 Коефіцієнти відбивання ρ і проходження τ хвиль де Бройля на межі низького *(U<E)* потенціального бар’єра нескінченної ширини (рис. 1):

$$\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2, \ \tau = \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2},$$

де k_1 і k_2 – хвильові числа хвиль де Бройля в областях *I* і *II*.

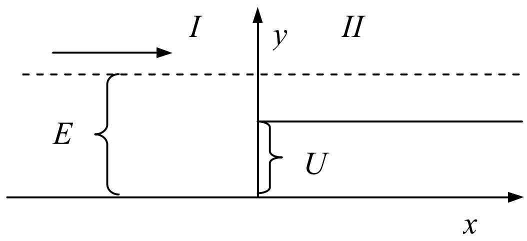

Рисунок 1 - Проходження квантовою частинкою низького потенціального бар’єра нескінченної ширини

21.11 Коефіцієнт прозорості *D* прямокутного потенціального бар’єра скінченної ширини

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}d\right],$$

де U – висота потенціального бар’єра; E – енергія частинки;

d – ширина бар’єра; m – маса частинки.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 21.1 Електрон, початковою швидкістю якого можна знехтувати, пройшов прискорювальну різницю потенціалів U. Знайти довжину хвилі де Бройля λ для двох випадків: а) $U_1 = 60\,В$; б) $U_2 = 600\,кВ$.

λ - ?

$U_1 = 60\,В$,

$U_2 = 600\,кВ \quad 6\cdot 10^5\,В.$

Розв'язання

Довжина хвилі де Бройля λ частинки залежить від її імпульсу p і визначається виразом

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \tag{1}$$

Імпульс частинки можна знайти, якщо відома її кінетична енергія E_k. Зв'язок імпульсу з кінетичною енергією для нерелятивістського (коли $W_K \le W_0$) і релятивістського (коли $W_K \approx W_0$) випадків визначається співвідношеннями:

$$p = \sqrt{2m_0W_K}\,,\ \ p = \frac{1}{c}\sqrt{W_K\left(W_K + 2W_0\right)},$$

де $W_0 = m_0c^2$ - енергія спокою частинки.

Вираз (1) з урахуванням цих співвідношень запишеться у нерелятивістському та релятивістському випадках таким чином:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0W_K}},\ \ \lambda_2 = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{W_K\left(W_K + 2W_0\right)}}. \tag{2}$$

Порівняємо кінетичні енергії електронів, що пройшли задані в умові задачі різниці потенціалів $U_1 = 60\ B$, $U_2 = 600\ кB$, з енергією спокою електрона і залежно від цього зробимо висновок, яку з наведених формул необхідно використовувати для розрахунків довжини хвилі де Бройля.

Кінетична енергія електрона, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів *U*, дорівнює

$$W_K = |e|U\ . \tag{3}$$

У першому випадку

$$W_{K1} = |e|U_1 = 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 60\ Дж = 60\ eB = 0,5\cdot 10^{-4}\ MeB\ ,$$

тобто енергія набагато менша від енергії спокою електрона $W_0 = m_0c^2 = 0,51\,MeB$. Тому для розрахунків можна використати нерелятивістську формулу.

У другому випадку кінетична енергія

$$W_{K2} = |e|U_2 = 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 6\cdot 10^5\ Дж = 0,6\,MeB\ ,$$

тобто більша за енергію спокою електрона. Тому в цьому випадку необхідно використати релятивістську формулу.

З урахуванням виразу (3) співвідношення (2) наберуть вигляду:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0eU_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{eU_2\left(eU_2 + 2m_0c^2\right)}}\ . \tag{4}$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (4) одержимо відповідь:

$$\lambda_1 \frac{6,63\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 9,1\cdot 10^{-31}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 60}} = 1,58\cdot 10^{-10}\left(м\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{\sqrt{\left(2\cdot 9,1\cdot 10^{-31}\cdot\left(3\cdot 10^{8}\right)^{2}+1,6\cdot 10^{-19}\cdot 6\cdot 10^{5}\right)1,6\cdot 10^{-19}\cdot 6\cdot 10^{5}}} =$$

$$= 1,26\cdot 10^{-12}\left(м\right).$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$\frac{|\hbar|}{\left(|m||e||U|\right)^{1/2}} = \frac{1\,Дж\cdot с}{\left(1\,кг\cdot 1\,Кл\cdot 1\,В\right)^{1/2}} \quad \left(\frac{1\,Дж}{1\,кг}\right)^{1/2} 1\,с \quad \left(\frac{1\,кг\cdot м^2/с^2}{1\,кг}\right)^{1/2}\cdot 1\,с = 1\,м.$$

Відповідь: $\lambda_1 = 1,58\cdot 10^{-10}$ м; $\lambda_2 = 1,26\cdot 10^{-12}$ м.

Приклад 21.2 Кінетична енергія електрона в атомі водню приблизно дорівнює $W_K = 10\,еВ$. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальні лінійні розміри атома.

Розв’язання

l_{min} - ?
$W_K = 10\,еВ \quad 1,6\cdot 10^{-18}\,Дж.$

Для розв’язання задачі використаємо співвідношення невизначеностей

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

де Δx – невизначеність координати частинки; Δp_x - невизначеність імпульсу частинки; $\hbar$ - стала Планка - Дірака.

Нехай атом має лінійні розміри l, тоді електрон атома буде перебувати десь в межах цієї області з похибкою

$$\Delta x = \frac{l}{2}.$$

У цьому випадку співвідношення невизначеностей набирає вигляду

$$\left(\frac{l}{2}\right)\Delta p_x \geq \hbar,$$

звідси

$$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta p_x}. \quad (1)$$

Фізично розумна невизначеність імпульсу Δp_x не повинна перевищувати значення самого імпульсу p_x, тобто $\Delta p_x \leq p_x$. Імпульс p_x пов'язаний з кінетичною енергією W_K співвідношенням

$$p_x = \sqrt{2mW_K}.$$

Підставивши ці вирази у (1) та перейшовши від нерівності до рівності, одержимо

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mW_K}}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо відповідь:

$$l_{\min} = \frac{2\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10}} = 1{,}23\cdot 10^{-10}\,(м).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\frac{[\hbar]}{\sqrt{[m][W_k]}} = \frac{1Дж\cdot с}{\sqrt{1кг\cdot 1Дж}} = \sqrt{\frac{1Дж}{1кг}}\cdot 1с = \sqrt{\frac{1кг\cdot м^2/с^2}{1кг}}\cdot 1с = 1\,м.$$

Відповідь: $l_{\min} = 1{,}23\cdot 10^{-10}$ $м$.

Приклад 21.3 Електрон з кінетичною енергією $W_K = 15\,еВ$ локалізований в області розміром $l = 1\,мкм$. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей відносну невизначеність його швидкості.

$\Delta v_x / v_x - ?$
$W_K = 10\,еВ = 1{,}6\cdot 10^{-18}$ $Дж.$

Розв’язання

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга має вигляд

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \qquad (1)$$

де Δx – невизначеність координати електрона; Δp_x - невизначеність його імпульсу.

Врахуємо, що імпульс частинки дорівнює

$$p = m\mathrm{v} \Rightarrow \Delta p = m\Delta \mathrm{v}_x. \qquad (2)$$

Підставимо вираз (1) в (2) і одержимо

$$\Delta x m \Delta \mathrm{v}_x \geq \hbar.$$

Врахуємо, що $\Delta x = d/2$, тоді

$$\frac{d}{2} m\Delta \mathrm{v}_x \geq \hbar .$$

Звідси

$$\Delta \mathrm{v}_x \geq \frac{2\hbar}{md} . \tag{3}$$

Імпульс частинки пов'язаний з його кінетичною енергією виразом

$$p = m\mathrm{v} = \sqrt{2mW_K} .$$

З рівняння знайдемо, що

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2mW_K}{m^2}} = \sqrt{\frac{2W_K}{m}} . \tag{4}$$

Відносну невизначеність швидкості електрона знайдемо, розділивши рівняння (3) на (4):

$$\frac{\Delta \mathrm{v}_x}{\mathrm{v}} = \frac{2\hbar}{md\sqrt{\frac{2W_K}{m}}} = \frac{2\hbar}{d\sqrt{2mW_K}} .$$

Після підставлення числових значень величин одержимо

$$\frac{\Delta v_x}{v} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{10^{-6}\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10}} = 3,18 \cdot 10^{-4}.$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\frac{[\hbar]}{[d]\sqrt{[m]}[W_K]} = \frac{Дж \cdot с}{м \cdot \sqrt{кг \cdot Дж}} = \sqrt{\frac{Дж}{кг}} \cdot \frac{с}{м} = \sqrt{\frac{кг \cdot м^2}{кг \cdot с^2}} \cdot \frac{м}{с} \cdot \frac{с}{м} = 1.$$

Відповідь: $\frac{\Delta v_x}{v} = 3,18 \cdot 10^{-4}$.

Приклад 21.4 Електрон перебуває у одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною l (рис.2). В яких точках у інтервалі ($0 \leq x \leq l$) густина ймовірності перебування електрона на першому та другому енергетичних рівнях однакова? Розрахувати густину ймовірності для цих точок.

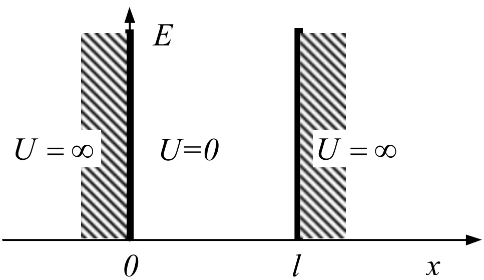

Рисунок 2 - Частинка в одновимірній потенціальній ямі

Розв'язання

$x-?\ W-?$
L, $W_1 = W_2$.

Припустимо, що квантова частинка може рухатися тільки вздовж осі x. При цьому рух обмежується непроникними для частинки стінками: $x=0$ і $x=l$. Потенціальна енергія у цьому випадку має вигляд, зображений на рис.2: вона дорівнює нулю при $0 \le x \le l$ і обертається у нескінченність при $x<0$ та $x>l$.

Для розв'язання задачі використаємо рівняння Шредінгера для одновимірного випадку

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E-U\right)\psi = 0 . \tag{1}$$

За межі потенціальної ями частинка потрапити не може. Тому ймовірність виявлення частинки зовні ями дорівнює нулю. Відповідно і функція ψ за межами потенціальної ями повинна дорівнювати нулю. Із умови неперервності випливає, що хвильова функція ψ дорівнює нулю і на межах ями, тобто

$$\psi(0) = \psi(l) = 0 . \tag{2}$$

Цю умову має задовольняти розв'язок рівняння (1).

В області $0<x<l$, де хвильова функція не дорівнює нулю, рівняння (1) має вигляд

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$$

(у цій області $U=0$). Введемо позначення

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E ,$$

у результаті отримаємо добре відоме з теорії коливань співвідношення

$$\psi'' + k^2 \psi = 0 .$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha) .$$

Умову (2) можна задовольнити відповідним вибором сталих k і α. Із умови $\psi(0) = 0$ одержимо

$$\psi(0) = A \sin \alpha = 0 ,$$

звідси випливає, що стала α повинна дорівнювати нулю. Крім того, має виконуватись умова

$$\psi(l) = A \sin kl = 0 , \tag{3}$$

що можливо лише у випадку, якщо

$$kl = \pm n\pi \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

($n = 0$ відпадає, оскільки при цьому $\psi \equiv 0$, тобто частинка не існує).

Підставивши значення k у співвідношення (3), одержимо власні функції частинки у потенціальній ямі шириною l:

$$\psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Для знаходження коефіцієнта A використаємо умову нормування хвильової функції, яка у даному випадку має вигляд:

$$A^2\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx = 1.$$

На кінцях проміжку інтегрування підінтегральна функція перетворюється у нуль. Тому значення інтеграла можна одержати, помноживши середнє значення $\sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ (яке, як добре відомо, дорівнює 0,5) на довжину проміжку l: $A^2\left(\frac{1}{2}\right)l = 1$, звідки $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$. Таким чином, власні функції мають вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

де $n = 1, 2, 3, \ldots$

На першому та другому енергетичних рівнях ці функції мають вигляд:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi x}{l}. \qquad (4)$$

Ймовірність перебування частинки у будь-якій точці потенціальної ями на цих рівнях визначається співвідношеннями:

$$W_1 = \int_0^l \psi_1^{\,2}\left(x\right)dx = \int_0^l \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l}dx\,,$$
$$W_2 = \int_0^l \psi_2^{\,2}\left(x\right)dx = \int_0^l \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l}dx\,.$$

Згідно з умовою задачі густина ймовірності перебування квантової частинки у деяких точках на першому і другому рівнях енергії однакова, звідси $\psi_1^{\,2}\left(x\right) = \psi_2^{\,2}\left(x\right)$. Після зіставлення співвідношень (4) одержимо

$$\frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l} = \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l}\,.$$

Розв'язавши тригонометричне рівняння $\sin\frac{\pi x}{l} = \pm\sin\frac{2\pi x}{l}$, одержимо $x_1 = \frac{l}{3}$, $x_2 = \frac{2l}{3}$.

Підставивши відповідні значення x у співвідношення $\psi\psi^* = \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l}$, одержимо відповідь:

$$\psi\psi^*_1 = \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi}{3} \quad \frac{2}{l}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2l}\,,\ \psi\psi^*_2 = \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2l}\,.$$

Відповідь: $\psi\psi^* = \frac{3}{2l}$.

Приклад 21.5 Знайти енергію основного стану атома водню.

W - ?

$n=1$.

Розв'язання

Рівняння Шредінгера для тривимірного випадку має вигляд

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0\,.$$

Оскільки задача є симетричною, це рівняння зручно записати у сферичних координатах. Зв'язок між декартовими та сферичними координатами має такий вигляд:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi\,,$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi\,,$$
$$z=r\cos\theta\,.$$

Після підставлення цих виразів рівняння Шредінгера набирає вигляду

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial^2\varphi}=-\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi\,. \quad (1)$$

Для того щоб одержати рівняння Шредінгера для атома водню, необхідно врахувати, що потенціальна енергія електрона має вигляд $U=-k\dfrac{e^2}{r}$, де $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Для розв'язку диференціального рівняння хвильову функцію візьмемо у вигляді $\psi=e^{-r/a}$. Підставляючи цей вираз у співвідношення (1) і враховуючи, що часткові похідні $\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$ та $\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}$ перетворюються у нуль, одержимо

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\left(e^{-r/a}\right)}{\partial r}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{k_0e^2}{r}\right)e^{-r/a}.$$

Після низки перетворень одержимо:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r^2}{a}e^{-r/a}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{k_0e^2}{r}\right)e^{-r/a},$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{r^2}{a}-\frac{2r}{a}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{k_0e^2}{r}\right),$$

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)-\left(\frac{2}{a}\right)\frac{1}{r}=-\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)-\left(\frac{2mk_0e^2}{\hbar^2}\right)\frac{1}{r}. \qquad (2)$$

Прирівнявши члени, що містять $\frac{1}{r}$, одержимо

$$\left(\frac{2}{a}\right)=\left(\frac{2mk_0e^2}{\hbar^2}\right),$$

звідси

$$a=\frac{\hbar^2}{k_0me^2}. \qquad (3)$$

Прирівнявши вільні члени рівняння (2), одержимо

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)=-\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right),$$

або

$$E=-\frac{\hbar^2}{2ma^2}.$$

Підставляючи у це рівняння співвідношення (3), одержимо кінцевий результат

$$E=-k_0{}^2\frac{me^4}{2\hbar^2}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{me^4}{2\hbar^2}.$$

Після підставлення числових значень *m, e*, $\hbar$ знайдемо:

$$E=-\left(\frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\right)^2\cdot\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^4}{2\cdot\left(1{,}05\cdot 10^{-34}\right)^2}\quad -21{,}8\cdot 10^{-19}\left(Дж\right)=$$

$$=-13{,}6\left(eВ\right).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[E]=\frac{1}{[\varepsilon_0]^2}\frac{[m][e]^4}{[\hbar]^2}=\frac{кг\cdot Кл^4}{(Ф/м)^2\,(Дж\cdot с)^2}=\frac{Кл^4\cdot кг\cdot м^2}{Ф^2\cdot Дж^2\cdot с^2}=$$

$$=\frac{Ф^4\cdot В^4\cdot Н\cdot м}{Ф^2\cdot Дж^2}=\frac{Ф^2\cdot В^4}{Дж}=\frac{Кл^2 В^4}{В^2 Дж}=\frac{Кл^2 В^2}{Дж}=\frac{Дж^2}{Дж}=Дж.$$

Відповідь: $E=-21{,}8\cdot 10^{-19}\ Дж\quad -13{,}6\ eВ$.

Приклад 21.6 Моноенергетичний потік електронів $(W = 100\,eB)$ падає на низький прямокутний потенціальний бар'єр нескінченної ширини (рис.1). Визначити висоту потенціального бар'єра *U*, якщо відомо, що 4% електронів, які падають на бар'єр, відбивається.

Розв'язання

U - ?
E=100 *еВ*,
ρ=0,4.

Коефіцієнт відбивання електронів від низького потенціального бар'єра задається виразом

$$\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 ,$$

де k_1 і k_2 – хвильові числа, які відповідають руху електронів у областях *I* та *II*.

В області *I* кінетична енергія електрона дорівнює E_k, відповідно хвильове число задається виразом

$$k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE_k} .$$

Оскільки координата електрона не визначена, імпульс електрона визначається точно, а із цього випливає, що можна говорити про точне значення його кінетичної енергії.

В області *II* кінетична енергія електрона дорівнює $E - U$, відповідно хвильове число записується у вигляді

$$k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\left(E - U\right)} .$$

Коефіцієнт відбивання можна записати таким чином:

$$\rho = \left(\frac{\sqrt{2mE} - \sqrt{2m\left(E - U\right)}}{\sqrt{2mE} + \sqrt{2m\left(E - U\right)}} \right)^2 . \qquad (1)$$

Поділимо чисельник та знаменник дробу (1) на $\sqrt{2mE}$:

$$\rho = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{U}{E}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{U}{E}}} \right)^2 . \qquad (2)$$

Розв’язавши рівняння (2) відносно $\sqrt{1 - \frac{U}{E}}$, одержимо

$$\sqrt{1 - \frac{U}{E}} = \frac{1 - \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}} .$$

Підносячи обидві частини рівності до квадрата, знайдемо висоту потенціального бар’єра:

$$U = \left[1 - \left(\frac{1 - \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}} \right)^2 \right] E . \qquad (3)$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (3) знайдемо відповідь:

$$U = \left[1 - \left(\frac{1 - \sqrt{0,04}}{1 + \sqrt{0,04}} \right)^2 \right] 100 = 55,6 \, \left(eB \right) .$$

Відповідь: $U = 55,6 \; eB$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

21.1 Визначити довжину хвилі де Бройля λ електрона, якщо його швидкість $v = 1 Мм/с$. Виконати такий самий розрахунок для протона.

Відповідь: $\lambda = 0{,}73$ *нм*; $\lambda = 3{,}8 \cdot 10^{-13}$ *нм*.

21.2 Кінетична енергія протона дорівнює його енергії спокою. Обчислити довжину хвилі де Бройля цього протона.

Відповідь: $\lambda_p = 2{,}7$ *пм*.

21.3 Визначити, при якій швидкості руху довжина хвилі де Бройля для електрона дорівнює комптонівській довжині хвилі.

Відповідь: $v = 2{,}12 \cdot 10^8\ м/с$.

21.4 Заряджена частинка, прискорена різницею потенціалів U =500 *В*, має довжину хвилі де Бройля λ =1,282 *пм*. Вважаючи заряд частинки таким, що дорівнює заряду електрона, визначити її масу.

Відповідь: $m = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ *кг*.

21.5 Визначити кінетичні енергії протона і електрона, для яких довжина хвилі де Бройля дорівнює λ =0,06 *нм*.

Відповідь: $W_{K,p} = 727\, фДж; W_{K,e} = 0{,}396\, фДж$.

21.6 Протон має кінетичну енергію, що дорівнює його енергії спокою. У скільки разів зміниться довжина хвилі де Бройля протона, якщо його кінетична енергія збільшиться у 2 рази?

Відповідь: $\lambda_2/\lambda_1 = 1{,}63$.

21.7 Якої енергії необхідно додатково надати електрону, щоб його дебройлівська довжина хвилі зменшилася від $\lambda_1 = 100\, пм$ до $\lambda_2 = 50\, пм$?

Відповідь: $W = 0{,}45\, кеВ$.

21.8 Електрон рухається по колу радіусом $r = 0,5\,см$ в однорідному магнітному полі з індукцією B = 8 *мТл*. Визначити довжину хвилі де Бройля λ електрона.
Відповідь: $\lambda = 0,1$ *нм*.

21.9 Знайти довжину хвилі де Бройля для α-частинки, нейтрона і молекули азоту, що рухаються із середньою квадратичною швидкістю при температурі $t = 25^0 C$.
Відповідь: $\lambda_\alpha = 73\,пм; \lambda_n = 145\,пм;\ \lambda_N = 28\,пм$.

21.10 Знайти довжину хвилі де Бройля для електрона, що рухається по першій борівській орбіті в атомі водню.
Відповідь: λ_e = 0,33 *нм*.

21.11 Використовуючи постулати Бора, знайти зв'язок між довжиною хвилі де Бройля і довжиною колової електронної орбіти.
Відповідь: $l_n = n\lambda_n$.

21.12 Скориставшись співвідношенням невизначеностей, оцінити розмитість енергетичного рівня у атомі водню: а) для основного стану; б) для збудженого стану (час його життя дорівнює $\tau = 10^{-8}\,c$).
Відповідь: а) $\Delta W = 0$; б) $\Delta W = 414\,неВ$.

21.13 Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити розміри ядра атома, вважаючи, що мінімальна енергія нуклона в ядрі 8 *МеВ*.
Відповідь: d = 1,6 *фм.*

21.14 Використовуючи співвідношення невизначеностей, показати, що в ядрі не можуть перебувати електрони. Лінійні розміри ядра взяти такими, що дорівнюють $d = 5,8 \cdot 10^{-15}$ *м*. Врахувати, що питома енергія зв'язку в середньому складає 8 *МеВ*/нуклон.
Відповідь: E = 80 МеВ >> 8 *МеВ*.

21.15 Середня кінетична енергія електрона в основному стані атома водню дорівнює $E_k = 13{,}6$ еВ. Використовуючи співвідношення невизначеностей, знайти найменшу похибку, з якою можна обчислити координату електрона в атомі.

Відповідь: Δx = 52,8 *пм*.

21.16 Оцінити найменші похибки, з якими можна визначити швидкість електрона, протона і кульки масою $m = 1$ *мг*, якщо координати частинок і центра кульки встановлені з невизначеністю Δx = 1 *мкм*.

Відповідь: $\Delta \mathrm{v}_e = 115\, м/с$; $\Delta \mathrm{v}_p = 0{,}063\, м/с$; $\Delta \mathrm{v}_к = 10^{-22}\ м/с$.

21.17 Електрон з кінетичною енергією E_k = 15 *еВ* міститься в металевій пилинці діаметром d = 1 мкм. Оцінити відносну похибку $\Delta \mathrm{v}/\mathrm{v}$, з якою може бути визначена його швидкість.

Відповідь: $\Delta \mathrm{v}/\mathrm{v} = 10^{-4}$.

21.18 Знайти хвильову функцію і значення енергії частинки масою m, що перебуває в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною l.

Відповідь: $\psi = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \dfrac{n\pi x}{l}$; $E = \dfrac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$.

21.19 Електрон перебуває в потенціальній ямі шириною l. В яких точках в інтервалі $(0<x<l)$ густина ймовірностей перебування електрона на першому і другому енергетичних рівнях однакова? Підрахувати густину ймовірності для цих точок. Розв`язок пояснити графічно.

Відповідь: $x_1 = \dfrac{l}{3}$; $x_2 = \dfrac{2l}{3}$; $|\varphi(x)|^2 = \dfrac{3}{2l}$.

21.20 Частинка в потенціальному ящику перебуває в основному стані. Яка ймовірність W знаходження частинки: а) у середній третині ящика; б) у крайній третині ящика?

Відповідь: а)W=0,61; *б)*W=0,2.

6.21 Частинка в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною l перебуває в збудженому стані ($n = 3$). Визначити, в яких точках інтервалу $0<x<l$ густина імовірності перебування частинки має максимальне і мінімальне значення.

Відповідь: $W_{\min} \Rightarrow x = \frac{l}{3}, \frac{2l}{3}$; $W_{\max} \Rightarrow x = \frac{l}{6}, \ \frac{l}{2}, \frac{5l}{6}$.

21.22 Електрон міститься в одновимірній потенціальній ямі шириною l. Визначити середнє значення координати $<x>$ електрона *$(0<x<l)$*.

Відповідь: $<x>=\frac{l}{2}$.

21.23 Електрон перебуває в основному стані в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої $l = 0{,}1\,нм$. Визначити імпульс електрона.

Відповідь: $p = 3{,}3\cdot10^{-24}$ *кг·м/с*.

21.24 Електрон перебуває в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої l =1 нм. Визначити найменшу різницю енергетичних рівнів електрона.

Відповідь: $\Delta E = 5{,}98\cdot10^{-20}$ *Дж* = 0,37 *еВ*.

21.25 Електрон перебуває в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої $l = 1{,}4\cdot 10^{-9}$ *м*. Визначити енергію, що випромінюється при переході електрона з третього енергетичного рівня на другий.

Відповідь: $E = 1{,}52\cdot10^{-19}$ *Дж* = 0,95 *еВ*.