

## 6 НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

### 6.1 СИЛИ ІНЕРЦІЇ

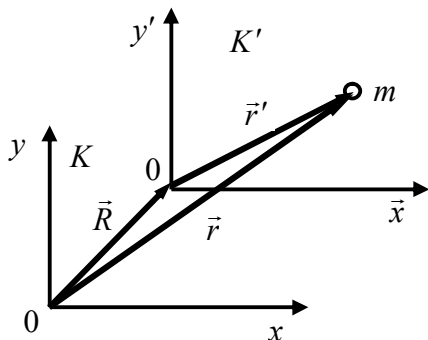


Рисунок 6.1 – До пояснення виникнення сил інерції

система  $K'$  рухається відносно  $K$  з прискоренням  $i$ , отже, є неінерціальною. Наведені на рисунку 6.1 радіуси-вектори пов'язані співвідношенням

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' .$$

Двічі продиференціюємо цей вираз за часом:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} ,$$

де  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$  - прискорення частинки в інерціальной системі  $K$  ;

$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{a}_c$  - прискорення системи  $K'$  відносно системи  $K$  .

Зміст третього складника залежить від виду прискорення неінерціальної системи відліку. У випадку, коли система  $K'$  рухається відносно  $K$  поступально  $\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{a}'$  (прискорення частинки в системі  $K'$ ), тоді

$$\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}' .$$

Помножимо рівняння на масу частинки:

$$m\vec{a} = m\vec{a}_C + m\vec{a}' ,$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_C .$$

Отже, відносно системи  $K'$  частинка поводить себе так, немов на неї, крім „реальної” сили  $\vec{F}$ , діє деяка додаткова „фіктивна”  $\vec{F}'_{in} = -m\vec{a}_C$ . (6.1)

Сила інерції обумовлена неінерціальністю тієї системи відліку, в якій розглядаються механічні явища.

Тоді

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}'_{in} .$$

Це рівняння за формою аналогічне до рівняння другого закону Ньютона. Таким чином, використання сил інерції дозволяє описувати рух тіл в будь-яких (як інерціальних, так і неінерціальних) системах відліку за допомогою однакових рівнянь руху.

**Характерною особливістю сил інерції є їх пропорційність масі тіла.** У цьому відношенні **сили інерції подібні до гравітаційних сил.** Уявимо, що ми перебуваємо у віддаленому від усіх зовнішніх тіл закритому об'ємі (кабіні), який рухається відносно інерціальних систем зі сталим прискоренням  $-\vec{g}$  у напрямку, який умовно ми назвемо

„верхом”. Тоді будь-яке тіло всередині kabіни буде поводити себе так, немов на нього діє сила інерції  $\vec{F}_{in} = m\vec{g}$ . Такі самі явища спостерігалися б і в тому випадку, коли б kabіна перебувала у стані спокою на поверхні Землі. Всередині kabіни ніякі досліди не допомогли б встановити, чим обумовлена сила  $m\vec{g}$  - прискореним рухом kabіни, чи дією гравітаційного поля Землі. Ця **еквівалентність сил інерції і сил тяжіння** покладена Ейнштейном в основу загальної теорії відносності.

## 6.2 ВІДЦЕНТРОВА СИЛА ІНЕРЦІЇ

Розглянемо поведінку тіла в неінерціальній системі відліку  $K'$ , яка обертається відносно інерціальної системи  $K$  із сталою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ , наприклад, у системі, пов'язаній з

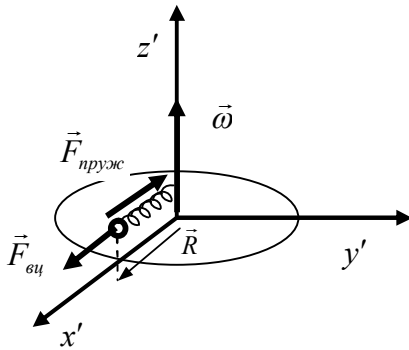


Рисунок 6.2 – Відцентрова сила інерції

диском, що обертається. Закріпимо на диску радіальний стрижень, на який надінемо кульку, прикріплену до осі диска пружиною. Доки диск не обертається – пружина не деформується. Під час обертання диска кулька розтягує пружину доти, доки пружна сила не стане такою, що дорівнює добутку маси кульки на його прискорення, тобто

$$\vec{F}_{пруж} = -m\omega^2\vec{R}.$$

Відносно системи  $K'$ , пов'язаної з диском, кулька перебуває у стані спокою. Це можна пояснити тим, що на кульку, крім сили  $\vec{F}_{пруж}$ , діє відцентрова сила інерції

$$\vec{F}_{\text{вц}} = m\omega^2 \vec{R}, \quad (6.2)$$

спрямована вздовж радіуса від осі обертання диска. Відцентрова сила інерції виникає в системах відліку, які обертаються, незалежно від того, рухається чи ні тіло в цій системі.

Внаслідок добового обертання Землі при точному розгляді поведінки тіл у системі відліку, пов'язаній із Землею, потрібно враховувати відцентрову силу інерції. Ця сила є максимальною на екваторі. За добу ( $T = 86400c$ ) Земля виконує повний оберт, тобто повертається на кут  $2\pi$ . Тоді кутова швидкість Землі

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{86400} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ рад}/c.$$

За формулою (6.2) знайдемо модуль відцентрової сили, яка діє на тіло масою 1кг на екваторі, враховуючи, що радіус Землі складає  $R = 6,38 \cdot 10^6 \text{ м}$ :

$$F_{\text{вц}} = 1 \cdot (7,27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,38 \cdot 10^6 = 0,0337H.$$

Ця величина складає  $\frac{1}{291}$  частину сили тяжіння. Це означає, що здебільшого відцентровою силою можна знехтувати. Однак при точних розрахунках прискорення вільного падіння потрібно враховувати і внесок відцентрової сили, яка зменшує силу тяжіння. Сила тяжіння змінюється з широтою. Внаслідок сплюснення Землі сила тяжіння змінюється з широтою як внаслідок добового обертання Землі, так і внаслідок її сплюснення. Тому на полюсах вона на 0,2% більша, ніж на екваторі. Відцентрова сила на полюсах дорівнює нулю, а на екваторі має максимальне значення, яке складає 0,3% від сили тяжіння. В підсумку прискорення вільного падіння змінюється з широтою від  $9,780 \frac{M}{c^2}$  на екваторі до  $9,832 \frac{M}{c^2}$  на

полюсах. Значення  $g = 9,80665 \frac{M}{c^2}$  на широті  $45^0$  беруть як стандартне значення. При підрахунках, які не потребують високої точності, приймають, що  $g = 9,81 \frac{M}{c^2}$ , або навіть  $g = 9,8 \frac{M}{c^2}$ .

### 6.3 СИЛА КОРІОЛІСА

У випадку руху тіла відносно обертової системи відліку на нього крім відцентрової сили інерції, діє ще одна сила інерції – сила Коріоліса.

Візьмемо горизонтальний диск, який обертається відносно нерухомої системи відліку із сталою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . Нехай по колу радіусом  $R$  рівномірно рухається матеріальна точка, прив'язана ниткою до осі диска, із швидкістю  $\vec{v}'$  відносно диска.

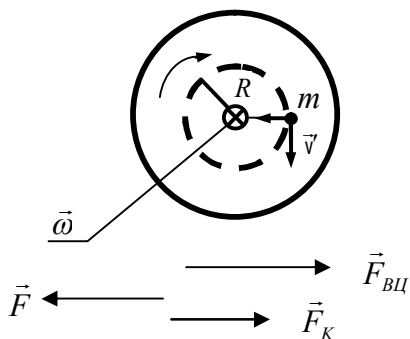


Рисунок 6.3 – Сила Коріоліса:  $\vec{F}$  - сила натягу нитки; напрямок швидкості точки та напрямок обертання диска збігаються

Лінійна швидкість точок кола радіусом  $R$  дорівнює  $\omega R$ . У випадку, зображеному на рисунку 6.3, модуль швидкості частинки відносно нерухомої системи відліку має значення

$$\vec{v}' + \omega R.$$

Тоді прискорення частинки в нерухомій системі відліку

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n} = \frac{(v' + \omega R)^2}{R} \vec{n} = \frac{\vec{v}'^2}{R} \vec{n} + \omega^2 R \vec{n} + \vec{v}' \omega \vec{n}.$$

Доданок  $\frac{\vec{v}'^2}{R} \vec{n} = \vec{a}'_n$  - це прискорення точки відносно диска (тобто прискорення у обертовій системі відліку). Добуток маси частинки на  $\vec{a}_n$  - сила натягу нитки  $\vec{F} = m\vec{a}_n$ . Таким чином, можна написати, що

$$\vec{F} = m\vec{a}_n = m\vec{a}'_n + m\omega^2 R \vec{n} + 2m\vec{v}' \omega \vec{n}.$$

Звідки

$$m\vec{a}'_n = \vec{F} - m\omega^2 R \vec{n} - 2m\vec{v}' \omega \vec{n}.$$

Спостерігач на диску має дійти висновку, що крім „реальної” сили  $\vec{F}$  на частинку діють дві додаткові сили, спрямовані від осі обертання. Перша з них

$$\vec{F}_{\text{ци}} = -m\omega^2 R \vec{n} -$$

це відцентрова сила інерції. Другу можна записати у вигляді

$$\vec{F}_K = -2m\vec{v}' \omega \vec{n} = 2m[\vec{v}' \vec{\omega}]. \quad (6.3)$$

Це **сила Коріоліса**. З отриманої формули бачимо, що сила Коріоліса:

1) перпендикулярна до вектора  $\vec{\omega}$ , тобто завжди лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання системи відліку;

2) перпендикулярна до швидкості  $\vec{v}'$ , тобто роботи над точкою не виконує. Сила Коріоліса може змінити тільки напрямок швидкості, не змінюючи її модуля.

Сила Коріоліса впливає на рух тіл біля Землі. Під час вільного падіння сила Коріоліса відхиляє тіла до сходу. Це відхилення пропорційне широті і є максимальним на екваторі. На полюсі воно дорівнює нулю. Силу Коріоліса необхідно враховувати під час стрільби на великі відстані та в низці інших випадків.

Сила Коріоліса, яка діє на тіло, що рухається вздовж меридіану в будь-якому напрямку (на північ чи південь), спрямована відносно напрямку руху вправо в Північній півкулі і вліво в Південній. Це призводить до того, що розмивається правий берег річок у Північній півкулі і лівий – у Південній.

У 1851 р. у Парижі було встановлено маятник Фуко (довжина 67 м) для демонстрування добового обертання Землі. Поворот площини коливань маятника спричиняє саме сила Коріоліса.

## **7 ОСНОВИ МЕХАНІКИ ІДЕАЛЬНИХ РІДИН І ГАЗІВ**

Як відомо, механіка вивчає рух тіл, які можуть знаходитися в різних агрегатних станах: твердому, рідкому та газоподібному. У різних агрегатних станах тіла мають різні властивості. Рідини і гази мають однакові властивості **суцільності і текучості**. Саме ця обставина дозволила поєднати вивчення законів руху рідин і газів в один розділ - механіку рідин і газів, **або гідромеханіку**. Під дією зовнішніх сил в рідинах і газах, як і в твердих тілах можуть виникати внутрішні напруги. Розглядаючи їх як суцільні середовища відзначимо, що рідини не маючи певної форми, зберігають практично незмінним свій об'єм. Гази не мають ні певної форми, ні фіксованого об'єму.

**Гідромеханіка** – це розділ механіки, який вивчає рівновагу і рух рідких і газоподібних середовищ та їх взаємодію між собою і з твердими тілами. Гідромеханіка є частиною **механіки суцільних середовищ**.

Як і інші розділи механіки, механіка рідин і газів складається із статички, кінематики та динаміки.

### **7.1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ГІДРОМЕХАНІКИ**

**Частинка рідини (газу)** – це елементарний об'єм рідини або газу. Лінійні розміри елементарного об'єму мають бути достатньо великими в порівнянні з довжиною вільного пробігу молекул газу (або амплітудою коливань молекул рідини) та достатньо малими порівняно з лінійними розмірами області течії.

**Текучість** – це властивість рідини (газу) набувати форми посудини, в якій вона знаходиться.

**В'язкість** – це внутрішнє тертя в рідині (газі). Детальніше це поняття буде розглянуте пізніше.



**Стисливість** – здатність тіл змінювати свій об’єм під дією зовнішніх сил. Відзначимо, що стисливість рідин на відміну від газів незначна.

Рідина, густина якої однакова в будь-якій точці і змінюватися не може, називається **нестисливою**.

**Ідеальна рідина (газ)** – це рідина, в якій відсутнє внутрішнє тертя.

Стан руху рідини (газу) повністю визначає п’ять величин: три компоненти швидкості  $\vec{v}$ , тиск  $p$  і густина  $\rho$ .

У рідині (далі цей термін буде використовуватися в даному розділі і для газів) сили притягання між молекулами – малі, і рідина не чинить опору розтягуванню. Проте при стисканні сили відштовхування між молекулами можуть бути значними. Саме з цієї причини для характеристики стану рідини вибрали не розтягувальну напругу ( $\sigma$ ), а тиск.

Досвід показує, що у нерухомій рідині, або в рідині, яка рухається повільно, тангенціальні тиски, пов’язані із в’язкістю рідини, відсутні. Це підтверджує той факт, що можна примусити масивне тіло, яке плаває по поверхні рідини, рухатися під дією будь-якої малої сили. У цьому випадку дотичні напруги, які передаються від верхнього (дотичного до тіла) шару до нижніх шарів рідини є малими і ними можна знехтувати. Таким чином, для характеристики стану руху рідини беруть перпендикулярну складову сили.

**Тиском** називається скалярна фізична величина, яка дорівнює відношенню нормальної сили до площі поверхні, на яку вона діє:

$$p = \frac{F_n}{S}, \quad (7.1)$$

де  $p$  - тиск;  $F_n$  - сила, що діє перпендикулярно до поверхні;  $S$  - площа поверхні.

Одиницею вимірювання тиску в Міжнародній системі є **паскаль (Па)**.  $1\text{Па}$  - це тиск, що створюється силою  $1\text{Н}$ , яка діє на поверхню площею  $1\text{м}^2$  перпендикулярно до цієї

поверхні. Оскільки  $1 \text{ Па}$  - дуже мала величина, то для технічних розрахунків широко використовують  $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$  і  $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$ .

Використовуються також такі позасистемні одиниці тиску:  $1 \text{ мм рт.ст.}$ ,  $1 \text{ мм H}_2\text{O}$  і  $1 \text{ атм}$ .  $1 \text{ мм рт.ст.}$  ( $1 \text{ мм H}_2\text{O}$ ) - це тиск, що створюється стовпом ртуті (води) висотою  $1 \text{ мм}$ .  $1 \text{ атм}$  - тиск повітряного стовпа на рівні моря. Розрізняють фізичну ( $1 \text{ атм}$ ) та технічну атмосфери ( $1 \text{ т.атм}$ ).

Наведемо співвідношення між системними та зазначеними позасистемними одиницями вимірювання тиску:

$$1 \text{ мм рт.ст.} = 133 \text{ Па} ;$$

$$1 \text{ мм H}_2\text{O} = 9,81 \text{ Па} ;$$

$$1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па} ;$$

$$1 \text{ т.атм} = 0,98 \cdot 10^5 \text{ Па} .$$

Для вимірювання тиску використовують **манометри**. Їх конструкції досить різноманітні. Потрібно пам'ятати, що за допомогою багатьох типів манометрів визначається тиск надлишковий над атмосферним.

## 7.2 ЕЛЕМЕНТИ ГІДРОСТАТИКИ

### 7.2.1 ГІДРОСТАТИЧНИЙ ТИСК

У нерухомій рідині є два види статичного тиску: **гідростатичний** і **зовнішній**. Внаслідок притягання до Землі рідина тисне на дно і стінки посудини і на всі тіла, які знаходяться в ній. Тиск, обумовлений вагою стовпа рідини, називається **гідростатичним**. Гідростатичний тиск залежить від висоти і не залежить від орієнтації площадки, на яку він створюється. Останнє призводить до так званого **гідростатичного парадоксу**. **Гідростатичний парадокс** – це явище, яке полягає у тому, що вага рідини в посудині може не збігатися з силою тиску на дно посудини. Так у посудинах, які

розширюються догори, сила тиску на дно менша за вагу рідини, а в посудинах, які звужуються догори – більша. Гідростатичний парадокс був виявлений Паскалем у 1654р.

Згадаємо, що **густина** – це фізична величина, яка дорівнює масі одиниці об'єму тіла:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (7.2)$$

Одиницею вимірювання густини є  $[\rho] = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Коли рідина з густиною  $\rho$  знаходиться в циліндричній посудині з площею перетину  $S$  з висотою стовпа рідини  $h$ , тоді **гідростатичний тиск** буде дорівнювати

$$p = \frac{mg}{S} = \frac{\rho Shg}{S} = \rho gh. \quad (7.3)$$

Бачимо, що **гідростатичний тиск** рідини залежить від густини  $\rho$  рідини, прискорення  $g$  вільного падіння та глибини  $h$ , на якій вимірюється тиск. Він не залежить від форми стовпа рідини.

Глибина  $h$  відраховується по вертикалі від розглянутої точки до рівня вільної поверхні рідини.

Відзначимо, що **тиск на криволінійні поверхні** буде таким самим як і на плоскій. Це буде доведено в курсі гідравліки у розділі гідростатика.

В умовах невагомості гідростатичний тиск у рідині відсутній, оскільки за цих умов рідина стає невагомою. **Зовнішній тиск** характеризує стискування рідини під дією зовнішньої сили. Зовнішнім є атмосферний тиск і тиск, який створюється у гідравлічних системах. На Землі з урахуванням сили тяжіння гідростатичний тиск дорівнює

$$p = p_0 + \rho gh, \quad (7.4)$$

де  $p_0$  - атмосферний тиск на поверхні рідини.

### 7.2.2 ЗАКОН ПАСКАЛЯ

Французький вчений Блез Паскаль (1623-1662) встановив такий закон: **рідини і гази передають створений на них тиск однаково в усіх напрямках.**

Якщо знехтувати силами тяжіння, які діють на кожен

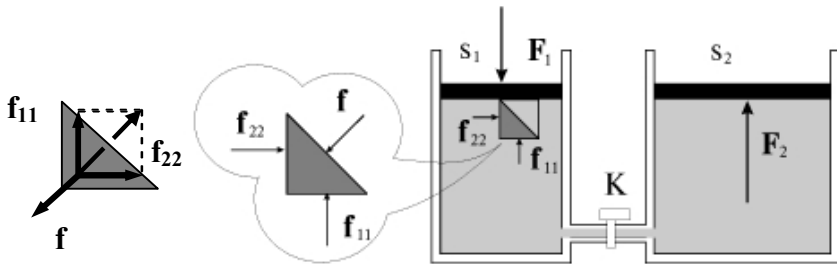


Рисунок 7.1 - До виведення закону Паскаля та принципу дії гідравлічного преса

частинку рідини (або силами інерції, якщо такі існують), то з найпростіших міркувань відносно умов рівноваги елемента рідини випливає, що

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = p, \quad (7.5)$$

при цьому тиск  $p$  є однаковим у всіх точках об'єму, зайнятого нерухомою рідиною. Умова (7.5) автоматично забезпечує не тільки рівність нулю суми сил тиску, прикладених до даного елемента, але рівність нулю сумарного моменту цих сил.

Для доказу цієї умови розглянемо нерухому рідину, поміщену в циліндричну посудину перетином  $S_1$ , закриту зверху поршнем (рис. 7.1 ліва посудина). Виділимо елемент рідини

кубічної форми з площею грані, яка дорівнює одиниці. Якщо надавити на поршень із силою  $F_1$ , то в рідині виникнуть тиски. На одиницю поверхні елемента рідини буде діяти стискальна сила  $\vec{f}_{ii} = -p_{ii}\vec{n}_i$ , спрямована протилежно до зовнішньої нормалі  $\vec{n}_i$

$i$ -ї поверхні (на рис. 7.1 зображені тільки дві сили).

Сили, які діють на протилежні грані кубика, однакові за модулем, тоді

$$p_{11} = \frac{F_1}{S_1}.$$

Рівність тисків  $p_{11}$  і  $p_{22}$  випливає з умови рівноваги половини кубика, виділеного більш темним кольором на рисунку 7.1. Справді,  $f_{11} = f_{22} = \frac{f}{\sqrt{2}}$ , тому  $p_{11} = p_{22}$ . Розглядаючи рівновагу елементарних об'ємів у різних точках рідини, одержимо умову

$$p_{ii} = p = \frac{F_1}{S_1},$$

яка є математичним виразом закону Паскаля.

Якщо посудину на рис. 7.1 з'єднати за допомогою трубки з іншою циліндричною посудиною перетином  $S_2$ , то при відкриванні крана  $K$  тиск по рідині, яка знаходиться в сполучній трубці, відповідно до закону Паскаля передається у другу посудину (рис. 7.1). На поршень, який закриває другу посудину, рідина буде тиснути вгору з силою

$$F_2 = pS_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2. \quad (7.6)$$

За умови  $S_2 > S_1$  отримаємо  $F_2 > F_1$ . Ця перевага у силі використовується в багатьох пристроях, таких як, гідравлічний прес, гідравлічний домкрат, гідропривід ковша екскаватора, ракет і літаків.

### 7.2.3 СПОЛУЧЕНІ ПОСУДИНИ

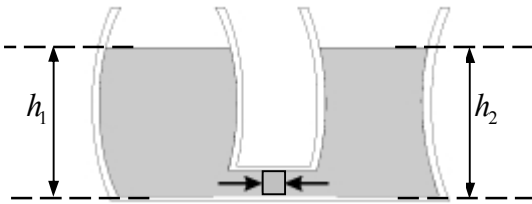


Рисунок 7.2 – Сполучені посудини

Посудини заповнені рідиною та з'єднані трубкою в нижній частині називаються **сполученими** (рис.7.2).

У таких посудинах рівень рідини буде однаковим у випадку однакових за густиною рідин. Дійсно, дві горизонтальні сили тиску забезпечують рівновагу кубика рідини в нижній частині сполучених посудин тільки за умови, що висота стовпів рідини в обох посудинах однакова.

Нехай однорідна рідина у сполучених посудинах перебуває у стані спокою. Тоді тиск на дно в кожній із посудин буде однаковим, тобто  $p_1 = p_2$ . Виражаючи тиск через густину і висоту рівнів рідини, одержуємо

$$\rho g h_1 = \rho g h_2 \Rightarrow h_1 = h_2.$$

Звідси випливає, що для однорідної рідини висота її рівнів у сполучених посудинах однакова. Принцип сполучених посудин покладений в основу роботи шлюзів, водопроводу і т. ін.

Якщо у сполучені посудини налити різні рідини із густинами  $\rho_1$  і  $\rho_2$ , які не змішуються, і в нижній частині розділити їх рухомою перегородкою, то в рівновазі вона

рухатися не буде. Це означає, що тиски на дно посудин ліворуч і праворуч від перегородки будуть однаковими:  $p_1 = p_2$ , тобто

$$p_{атм} + \rho_1 g h_1 = p_{атм} + \rho_2 g h_2 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2.$$

Звідси випливає, що у стані рівноваги (спокою) висоти стовпів різнорідних рідин у сполучених посудинах обернено пропорційні їх густині:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (7.7)$$

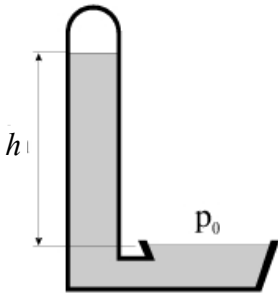


Рисунок 7.3 – Ртутний манометр

Відзначимо, що стовп ртуті висотою  $h = 760 \text{ мм}$  зрівноважує тиск 10 – метрового стовпа води або майже 10 – кілометрового стовпа атмосфери. Саме тому для визначення атмосферного тиску використовують ртутні манометри, а атмосферний тиск вимірюють в міліметрах ртутного стовпа. Такий манометр являє собою дві сполучені посудини, заповнені ртуттю (рис.7.3).

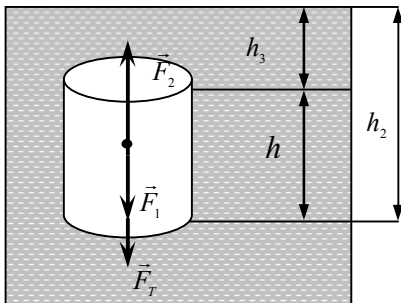


Рисунок 7.4 - До виведення закону Архімеда

#### 7.2.4 ЗАКОН АРХІМЕДА

Наявність тиску рідини приводить до існування статичної піднімальної (виштовхувальної) сили, що діє на занурені в рідину тіла. Закон, що визначає величину цієї сили, був відкритий Архімедом.

**Закон Архімеда:** на будь-яке тіло, занурене в рідину, з

боку рідини діє виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі витісненої тілом рідини.

Доведемо закон Архімеда. Сила Архімеда, яка діє на циліндр, занурений у рідину (рис.7.4), дорівнює

$$F_A = F_2 - F_1 .$$

Або

$$F_2 - F_1 = p_2 S - p_1 S .$$

Тоді

$$F_A = (p_2 - p_1) S .$$

Оскільки, згідно з (7.3)

$$p_2 = \rho_p g h_2, \quad p_1 = \rho_p g h_1 , \\ F_A = \rho_p g S (h_2 - h_1) .$$

З рисунка 7.4 бачимо, що  $h_2 - h_1 = h$  - висота тіла,  $Sh = V$  - об'єм тіла, тоді

$$F_A = \rho_p g V . \quad (7.8)$$

Сила Архімеда дозволяє визначити **умови плавання тіл:**

**1) тіло спливає** за умови

$$F_A > F_T \Rightarrow \rho_p g V > \rho_T g V , \\ \rho_p > \rho_T .$$

Тіло спливає, якщо густина рідини більша за густину тіла;

**2) індиферентна рівновага** спостерігається за умови

$$F_A = F_T \Rightarrow \rho_p = \rho_T .$$



Тіло перебуває в зваженому стані, якщо густина рідини дорівнює густині тіла;

3) **тіло тоне** за умови

$$F_A < F_T \Rightarrow \rho_p < \rho_T.$$

Тіло тоне, якщо густина рідини менша за густину тіла.

Існування статичної піднімальної сили в рідинах (газах) широко використовується при побудові дирижаблів, метеорологічних зондів і т.п.

### 7.3 ЕЛЕМЕНТИ КІНЕМАТИКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

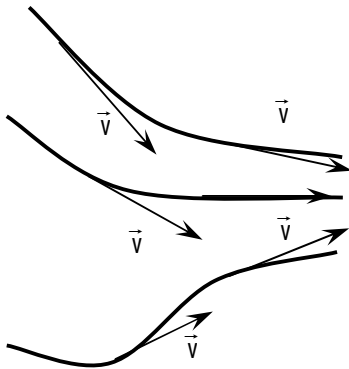


Рисунок 7.5 – Лінії течії та швидкості частинок рухомої рідини

Під час вивчення руху рідин і газів їх розглядають як суцільне середовище, без урахування молекулярної будови. Існує два способи опису руху рідини (газу). Перший полягає у визначенні положення і швидкостей усіх частинок рідини для кожного моменту часу. Але простіше слідкувати не за частинками рідини, а за окремими точками

простору і відмічати швидкість, з якою проходять через кожную точку окремі частинки рідини. Сукупність векторів  $\vec{v}(t)$ , заданих для усіх точок простору, називають полем вектора швидкості. Це поле можна зобразити за допомогою **ліній течії**. **Лінії течії** – це лінії, дотична до яких збігається з вектором швидкості

частинки рідини у даній точці (рис.7.5). Чим густішими є лінії течії, тим більшу швидкість має рідина.

Потік рідини називають **стаціонарним**, якщо швидкість потоку в усіх точках простору з часом не змінюється. Під час стаціонарної течії будь-яка частинка рідини проходить через дану точку простору з тією самою швидкістю  $\vec{v}$ . Картина ліній течії при стаціонарній течії не змінюється і лінії течії у цьому випадку збігаються з траєкторіями частинок. Якщо через усі точки невеликого замкнутого контуру провести лінії течії, то утвориться поверхня, яку називають трубкою течії. Частинки

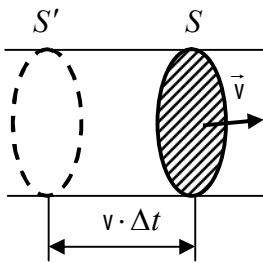


Рисунок 7.6 – До виведення рівняння нерозривності

рідини під час руху не перетинають стінок трубки течії. Візьмемо трубку течії таку, щоб у всіх точках її перерізу швидкість частинок була однаковою. При стаціонарній течії рідини трубка течії подібна до стінок жорсткої труби. Тому через поверхню S за час  $\Delta t$  пройде об'єм рідини  $S \cdot v \cdot \Delta t$  (тут S - площа перерізу трубки течії).

Маса ізольованої системи протягом усього часу руху не змінюється, тобто

$$\frac{dm}{dt} = 0.$$

Розглянемо частинку (елементарний об'єм) рідини об'ємом  $V$ . Її маса дорівнює

$$m = \rho V,$$

де  $\rho$  - густина середовища.

Тоді

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = 0.$$

Візьмемо похідну і розділимо ліву і праву частину рівняння на  $V$ , отримаємо **диференціальне рівняння нерозривності**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (7.9)$$

Масу рідини, яка протікає за одиницю часу через будь-який поперечний переріз трубки течії, називають **масовою витратою**:

$$\bar{m} = \frac{dm}{dt}. \quad (7.10)$$

При стаціонарному потоці масова витрата однакова для всіх перерізів. За час  $\Delta t$  через поверхню  $S$  пройдуть усі частинки рідини, які містяться в об'ємі між  $S$  і  $S'$  (рис. 7.6). Якщо взяти два перерізи, площі яких  $S_1$  і  $S_2$ , то для стаціонарного потоку можна записати:

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \text{const}, \quad \bar{m}_1 = \rho_1 S_1 v_1, \quad \bar{m}_2 = \rho_2 S_2 v_2.$$

Тоді

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2.$$

Для нестисливого середовища  $\rho_1 = \rho_2$  і **рівняння нерозривності для стаціонарного потоку** набере вигляду

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Таким чином, для нестисливої рідини при стаціонарній течії добуток  $S \cdot v$  в будь-якому перерізі даної трубки течії не змінюється:

$$S \cdot v = const. \quad (7.11)$$

Таким чином, ми отримали **рівняння нерозривності потоку (7.11) в інтегральній формі** для стаціонарної течії нестисливої рідини.

#### 7.4 ЕЛЕМЕНТИ ГІДРОГАЗОДИНАМІКИ

Рівняння руху рідин і газів отримані на основі законів збереження імпульсу, моменту імпульсу, енергії і маси (за відсутності масообміну). Таким рівнянням для нестационарної трьохвимірної (3D) течії в'язкої стисливої рідини (газу) є **рівняння Нав'є – Стокса**. Наведемо його у векторній формі:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}, \quad (7.12)$$

де  $\vec{f} = \frac{\vec{F}}{m}$  напруга масових сил;  $\eta$  - динамічний коефіцієнт в'язкості;  $\vec{v}$  - швидкість потоку;  $p$  - тиск.

У загальному вигляді точного розв'язку **рівняння Нав'є – Стокса** не існує. Для значної частини задач рівняння Нав'є – Стокса спрощується. Так, для стаціонарного нев'язкого потоку – воно переходить в рівняння Ейлера.

Для розрахунку одновимірної стаціонарної течії нев'язкої рідини широко використовується **рівняння Бернуллі**.

### 7.4.1 ЗАЛЕЖНІСТЬ ТИСКУ РІДИНИ ВІД ШВИДКОСТІ ЇЇ ТЕЧІЇ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

Під час руху ідеальної рідини її механічна енергія зберігається. Закон збереження механічної енергії рідини при її протіканні по трубках течії із змінною площею перерізу є основою **рівняння Бернуллі**.

Одержимо це рівняння. Виділимо об'єм  $V$  рідини,

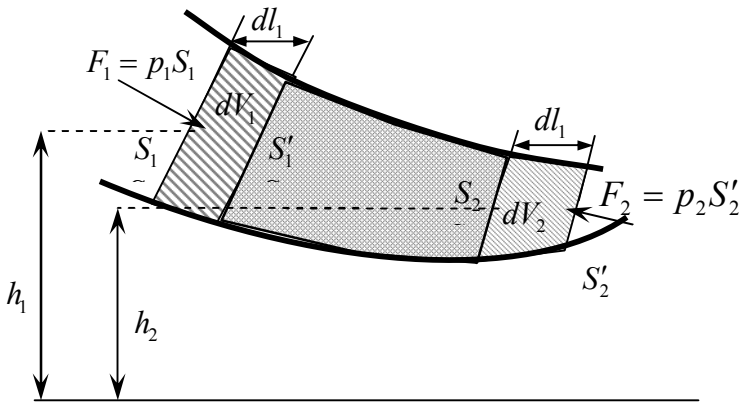


Рисунок 7.7 – До виведення рівняння Бернуллі

обмежений стінками трубки і перерізами  $S_1$  і  $S_2$  (рис. 7.7). За малий проміжок часу  $dt$  цей об'єм переміститься уздовж трубки, причому границя  $S_1$  об'єму  $V$  переміститься на  $dl_1$ , а границя  $S_2$  – на  $dl_2$ . Згідно із рівнянням нерозривності при  $\rho = const$   $dV_1 = dV_2 = dV$ . При цьому силами тиску виконується робота, що дорівнює збільшенню повної енергії ( $W_k + W_p$ ) розглянутого об'єму рідини  $V$ . Сили тиску, що діють на бічну поверхню трубки, роботи не виконують, оскільки спрямовані перпендикулярно до переміщення:  $A_b = 0$ . Робота сил тиску, прикладених до перерізів  $S_1$  і  $S_2$ , дорівнює

$$dA_1 = F_1 dl_1 = p_1 S_1 dl_1 = dA_2 = F_2 dl_2 = p_2 S_2 dl_2.$$

Робота, що виконується над об'ємом  $V$ , дорівнює

$$dA = dA_1 - dA_2 = (p_1 - p_2)dV .$$

Повна енергія розглянутого об'єму рідини складається з кінетичної енергії його руху і потенціальної енергії вибраного об'єму в полі земного тяжіння. Внаслідок стаціонарності течії повна енергія рідини між перерізами  $S'_1$  і  $S_2$  не змінюється. Ця частина показана на рисунку 7.7 подвійним штрихуванням. Тому зміна енергії розглянутого об'єму рідини має дорівнювати різниці значень повної енергії об'ємів  $dV_2$  і  $dV_1$ , маса яких  $dm_1 = dm_2 = dm = \rho dV$ , де  $\rho$  - густина рідини.

Потенціальна енергія об'ємів  $dV_1$  і  $dV_2$  дорівнює

$$dW_{p_1} = dmgh_1 = \rho dVgh_1 \text{ та } dW_{p_2} = dmgh_2 = \rho dVgh_2 .$$

Зміна потенціальної енергії

$$dW_p = dW_{p_2} - dW_{p_1} ,$$

або

$$dW_p = \rho g dV (h_2 - h_1) .$$

Кінетична енергія об'єму  $dV_1$  дорівнює

$$dW_{k_1} = \frac{dm_1 v_1^2}{2} = \frac{\rho \cdot dV \cdot v_1^2}{2} ,$$

а об'єму  $dV_2$  -

$$dW_{k_2} = \frac{dm_2 v_2^2}{2} = \frac{\rho \cdot dV \cdot v_2^2}{2}.$$

Зміна кінетичної енергії

$$dW_k = dW_{k_2} - dW_{k_1}, \text{ або } dW_k = \frac{\rho dV}{2} (v_2^2 - v_1^2).$$

Тоді для збільшення повної енергії отримаємо вираз

$$dW = dW_p + dW_k,$$

або

$$dW = \rho g dV (h_2 - h_1) + \frac{\rho dV}{2} (v_2^2 - v_1^2).$$

Ця зміна повної енергії відповідно до закону збереження механічної енергії дорівнює роботі сил тиску, прикладених до перерізів  $S_1$  і  $S_2$ :  $dA = dW$ , або

$$(p_1 - p_2) dV = \rho g dV (h_2 - h_1) + \frac{\rho dV}{2} (v_2^2 - v_1^2).$$

Скоротивши на  $dV$  і виконавши нескладні перетворення, отримаємо

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2},$$

або

$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}. \quad (7.13)$$

Це і є **рівняння Бернуллі** для стаціонарного потоку ідеальної рідини.

У випадку **горизонтально розміщеної труби**  $h_1 = h_2$  рівняння Бернуллі набере вигляду

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2). \quad (7.14)$$

Звідси бачимо, що тиск рідини більший там, де швидкість менша, тобто де більший переріз.

### 7.4.2 ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ОТВОРУ

Розглянемо витікання ідеальної рідини з невеликого отвору в широкій відкритій посудині (рис.7.8). Застосуємо для перерізів  $S_1$  і  $S_2$  теорему Бернуллі. Тиски  $p_1$  і  $p_2$  однакові і дорівнюють атмосферному тиску. Швидкістю відкритої поверхні  $S_1$  внаслідок її невеликого значення можна знехтувати. Тоді рівняння Бернуллі матиме вигляд

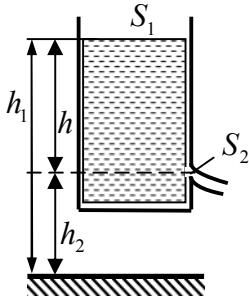


Рисунок 7.8 – До виведення формули Торрічеллі

$$\rho gh_1 = \rho gh_2 + \frac{\rho \cdot v^2}{2},$$

де  $v$  - швидкість рідини в перерізі  $S_2$  (швидкість витікання з отвору). Враховуючи, що  $h = h_1 - h_2$ , отримаємо

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (7.15)$$

Цей вираз називають **формулою Торрічеллі**.



### 7.4.3. ПІДНІМАЛЬНА СИЛА КРИЛА ЛІТАКА

Щоб зрозуміти причину появи піднімальної сили, спочатку розглянемо безударне обтікання пластинки (рис.7.9).

**Безударним обтіканням** профілю називають таке обтікання, при якому кут атаки дорівнює нулю. **Кут атаки** – це кут нахилу профілю до напрямку потоку.

Для спрощення картини будемо вважати, що повітря не має в'язкості. Пластика нульової товщини не впливає на потік повітря. Швидкості потоку зверху і знизу пластинки однакові.

Тепер розглянемо безударне обтікання симетричного профілю (рис.7.10). У цьому випадку лінії течії поблизу симетричного профілю викривляються. На частинки газу, які рухаються по викривлених траєкторіях, діють відцентрові сили, які зрівноважуються силами тиску, спрямованими вздовж нормалі до поверхні профілю.

Таким чином, статистичний тиск на поверхні профілю

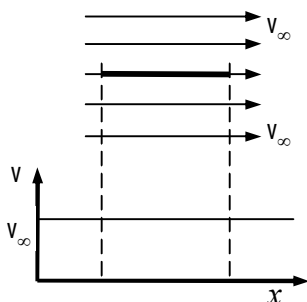


Рисунок 7.9 – Безударне обтікання пластинки та графік зміни швидкості вздовж пластинки

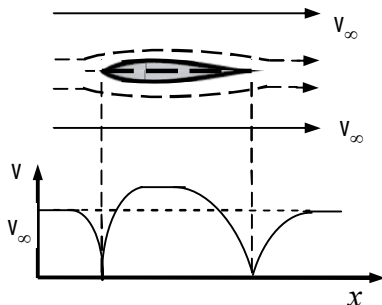


Рисунок 7.10 – Безударне обтікання симетричного профілю та графік зміни швидкості вздовж його поверхонь

стає меншим, ніж тиск  $p_\infty$  далеко від профілю. У відповідності до рівняння Бернуллі швидкість поблизу профілю буде більшою за швидкість незбуреного потоку  $v_\infty$ . Внаслідок симетричності профілю швидкості вздовж верхньої і нижньої поверхонь профілю будуть однаковими, тоді і тиски на ці поверхні будуть

однаковими. Це означає, що в даному випадку піднімальна сила дорівнює нулю.

Тепер розглянемо обтікання **дужки** (дужка – це вигнута пластинка з нульовою товщиною).

Швидкість потоку на верхній поверхні дужки буде

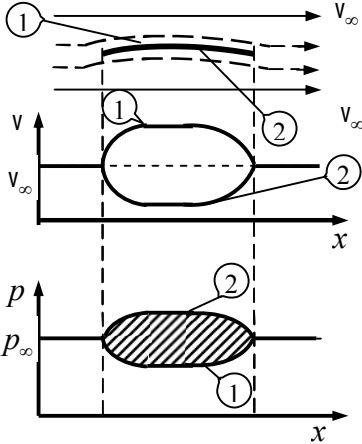


Рисунок 7.11 – Безударне обтікання дужки, графіки зміни швидкостей вздовж його поверхонь та тиски зверху (1) і знизу (2) дужки

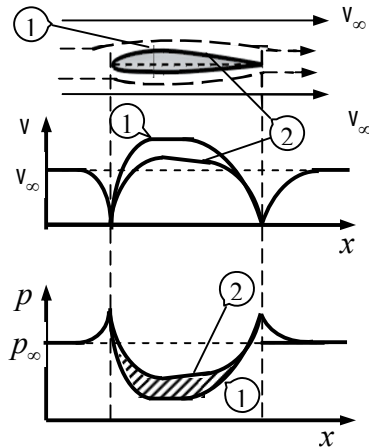


Рисунок 7.12 – Безударне обтікання вигнутого профілю, графіки зміни швидкостей вздовж його поверхонь та тиски зверху (1) і знизу (2)

$v_1 > v_\infty$ , а тиск  $p_1 < p_\infty$ . На нижній поверхні дужки -  $v_2 < v_\infty$ , а  $p_2 > p_\infty$ . Різниця тисків (заштрихована область на рис. 7.11) створює піднімальну силу.

Нарешті розглянемо обтікання вигнутого профілю (рис.7.12). При обтіканні вигнутого профілю як і для дужки  $v_1 > v_2$ , а  $p_1 < p_2$ . Піднімальна сила визначається різницею тисків на нижній і верхній поверхнях профілю.

У випадку течії в'язкого газу з'являється також сила лобового опору, спрямована проти напрямку руху крила.

При збільшенні швидкості літака зростає спрямована нагору різниця тисків, і на крила літака діє **піднімальна сила**, яка відповідно збільшується. Як тільки вона починає перевищувати силу гравітаційного притягання літака до землі, літак злітає в небо. Під час горизонтального польоту піднімальна сила рівноважує силу тяжіння.

До того ж виявляється, що літак в аеропорту в різні дні бере розгін по злітно-посадочній смузі в протилежних напрямках, і сідає на неї також то в одному, то в іншому напрямках. Вибір напрямку не довільний: він залежить від напрямку вітру. Під час руху назустріч зустрічному вітру швидкість повітряного потоку, що обтікає крило літака, дорівнює швидкості літака відносно землі плюс швидкість самого вітру відносно землі. Тому під час руху назустріч вітру швидкість відриву від землі, при якій піднімальна сила, описувана рівнянням Бернуллі, починає перевищувати силу тяжіння, виявляється меншою, і літаку потрібна менша довжина розбігу або гальмування після посадки. Тим самим знижується ризик виходу за межі злітно-посадочної смуги і заощаджується паливе за рахунок того, що частина піднімальної сили створюється за рахунок енергії зустрічного вітру.

Наведені вище міркування дають дуже спрощене пояснення підйімальної сили.

**Теорія підйімальної сили** була розроблена М.Є.Жуковським у 1906р. Саме Жуковський разом з Чаплигіним першими встановили зв'язок між формою профілю, кутом атаки і циркуляцією, яка виникає навколо профілю.

## 8 ПОНЯТТЯ ПРО РЕЖИМИ РУХУ РЕАЛЬНИХ РІДИН І ГАЗІВ

### 8.1 ВИДИ ТЕЧІЇ

Ідеальна рідина, тобто рідина без внутрішнього тертя, є абстракцією. Всі реальні рідини і гази мають внутрішнє тертя, яке називають **в'язкістю**. Зокрема, в'язкість проявляється у тому, що рух рідини (газу) після припинення дії причини, яка його викликала, поступово припиняється.

Розглянемо рух рідини в циліндричній трубці (рис.8.1).

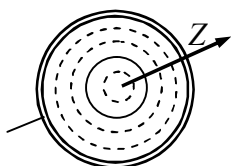


Рисунок 8.1 - Поперечний переріз труби, в якій тече рідина. Штриховані кола – умовні границі між шарами. Напрямок осі  $Z$  перпендикулярний

Досліди показують, що при повільній течії швидкість частинок рідини змінюється від нуля безпосередньо біля стінок труби до максимального значення на її осі. Рідина при цьому виявляється немовби розділеною на тонкі циліндричні шари, які ковзають один відносно іншого не змішуючись. Така течія називається **ламінарною**. При збільшенні швидкості течії ламінарний рух переходить у **турбулентний**. Він супроводжується неупорядкованим рухом частинок рідини. Результатом такого руху є

перемішування шарів потоку. Умови переходу від ламінарної до турбулентної течії визначаються безрозмірним параметром – **числом Рейнольдса** (див. нижче).

З повсякденного досвіду відомо, що для того, щоб створити і підтримувати сталою течію рідини в трубці, потрібно створити і підтримувати різницю тисків між кінцями труби. Оскільки при встановленому русі рідина рухається без прискорення, необхідність дії сил тиску вказує на те, що ці сили зрівноважуються силами опору руху рідини. Це сили внутрішнього тертя на границі зі стінкою труби і на границях

між шарами рідини, які рухаються. Більш швидкий шар прагне потягнути за собою повільніший, діючи на нього з силою, яка спрямована за течією. У той самий час повільніший шар уповільнює рух більш швидкого. Виділимо на границі між шарами площадку з площею поверхні  $\Delta S$ . Сила, з якою „швидкий” шар діє на поверхню  $\Delta S$ , дорівнює  $\vec{F}_1$ . „Повільний”

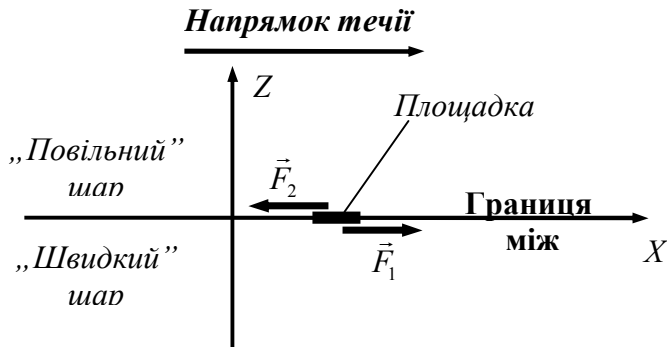


Рисунок 8.2 – Сила взаємодії між шарами рідини при стаціонарній течії рідини ( $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ ). Вісь  $Z$  спрямована перпендикулярно до границі між шарами

шар діє на площадку  $\Delta S$  з силою  $\vec{F}_2$  (рис. 8.2).

Дослідженнями встановлено, що сила внутрішнього тертя спрямована по дотичній до шарів рідини або газу і пропорційна добутку градієнта швидкості між шарами на площу їх контакту.

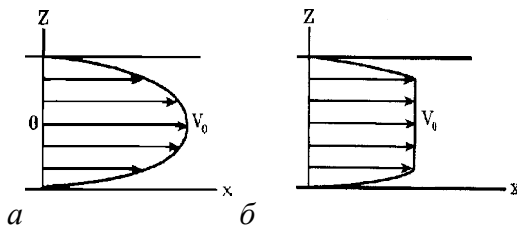


Рисунок 8.3 – Профіль швидкостей при ламінарній (а) та турбулентній (б) течії в циліндричній трубі

Модуль сили внутрішнього тертя для ламінарної течії визначається **рівнянням Ньютона**

$$F = -\eta \left| \frac{dv}{dz} \right| \Delta S, \quad (8.1)$$

де  $\eta$  - динамічний коефіцієнт в'язкості, який залежить від природи і стану (наприклад, температури) рідини.

Відзначимо, що при ламінарній течії швидкість змінюється з відстанню від осі труби за параболічним законом (рис. 8.3).

## 8.2 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ

**Теорія подібності** - вчення про умови подібності фізичних явищ. Ця теорія ґрунтується на вченні про розмірності фізичних величин (аналіз розмірностей) і є основою **фізичного моделювання**. **Фізичне моделювання** - вид моделювання, який полягає в заміні вивчення деякого об'єкта або явища експериментальним дослідженням його моделі, яка має таку саму фізичну природу.

У науці будь-який експеримент, метою якого є виявлення тих або інших закономірностей досліджуваного явища чи перевірка правильності і границь застосовності знайдених теоретичним шляхом результатів, власне кажучи і є моделюванням, оскільки об'єктом експерименту є конкретна модель, яка має необхідні фізичні властивості. У техніці фізичне моделювання використовується при проектуванні і спорудженні різних об'єктів для визначення на відповідних моделях тих або інших властивостей (характеристик) як об'єкта в цілому, так і окремих його частин. До фізичного моделювання звертаються не тільки з економічних міркувань, але і тому, що натурні випробовування дуже важко або взагалі неможливо виконати, особливо коли розміри натурального об'єкта занадто великі (малі) і т.ін.

**Предметом теорії подібності є встановлення критеріїв подібності різних фізичних явищ і вивчення за допомогою цих критеріїв властивостей самих явищ.**

Фізичні явища, процеси або системи **подібні**, якщо в подібні моменти часу в схожих точках простору значення змінних величин, що характеризують стан однієї системи, пропорційні відповідним величинам іншої системи. Коефіцієнт пропорційності для кожної з величин називається **коефіцієнтом подібності**.

Фізична подібність є узагальненням елементарного і наочного поняття **геометричної подібності**. При геометричній подібності існує пропорційність (подібність) подібних геометричних елементів подібних фігур або тіл. При **фізичній подібності** поля відповідних фізичних параметрів двох систем подібні в просторі і часі. Наприклад, при **кінематичній подібності** існує подібність полів швидкості для двох розглянутих рухів; при **динамічній подібності** реалізується подібність систем діючих сил або силових полів різної фізичної природи (сили тяжіння, сили тиску, сили в'язкості і т.п.); **механічна подібність** (наприклад, подібність двох потоків рідини або газу, подібність двох пружних систем і т.п.) припускає наявність геометричної, кінематичної і динамічної подібностей; при **подібності теплових процесів** подібні відповідні поля температур і теплових потоків; при **електродинамічній подібності** — поля струмів, напруг, потужностей, полів електромагнітних сил. Усі перелічені види подібності — окремі випадки фізичної подібності.

З розвитком досліджень складних фізичних і фізико-хімічних процесів, що включають механічні, теплові і хімічні явища, розвиваються і методи теорії подібності для цих процесів, наприклад, встановлюються умови подібності процесів тертя і зносу деталей машин, кінетики фізико-хімічних перетворень та інших явищ. Пропорційність для подібних явищ усіх їх характерних параметрів приводить до того, що всі безрозмірні комбінації, які можна скласти з цих параметрів, мають для цих явищ однакові чисельні значення. Безрозмірні комбінації, складені з визначальних параметрів розглянутих явищ, називаються **критеріями подібності**. Будь-яка комбінація

з критеріїв подібності також являє собою критерій подібності розглянутих фізичних явищ.

Подібність фізичних явищ характеризується кількома десятками критеріїв подібності. Найчастіше на практиці трапляється ситуація, коли в розглянутих фізичних явищах або системах не всі незалежні критерії мають однакові значення. Така подібність є **неповною** (частковою). При цьому необхідно, щоб вплив на проходження розглянутих фізичних процесів критеріїв, подібність яких не дотримується, був би незначним.

Розмірні фізичні параметри, які входять до критеріїв подібності, можуть мати істотно різні значення; однаковими повинні бути лише безрозмірні **критерії подібності**. Ця властивість подібних систем і є основою фізичного моделювання.

Щоб зрозуміти усю важливість **критеріїв подібності** потрібно спочатку розглянути так звані **безрозмірні величини**. Припустимо, нам потрібно виміряти геометричні розміри кімнати. Ми взяли рулетку і визначили, що довжина кімнати дорівнює 5 метрів. Однак, якщо ми візьмемо рулетку, градуйовану у футах, виявиться, що довжина кімнати дорівнює 15 футів з гаком. Таким чином, отримані при вимірюванні значення залежать від одиниць, які використовуються, тоді як реальна довжина кімнати не змінюється.

Однак є такі характеристики геометрії кімнати, які ніяк не залежать від одиниць вимірювання. Зокрема, такою величиною є відношення довжини кімнати до її ширини - так зване **характеристичне співвідношення**. Якщо кімната має довжину 20 футів і ширину 10 футів, її характеристичне співвідношення дорівнює 2. Вимірюючи довжину і ширину кімнати в метрах, ми одержимо, що розміри кімнати дорівнюють  $6,096 \text{ м} \times 3,048 \text{ м}$ , однак характеристичне співвідношення залишиться таким самим:  $6,096 \text{ м} : 3,048 \text{ м} = 2$ . У даному випадку 2 — безрозмірна характеристика кімнати.

### **8.3 ПОДІБНІСТЬ ГІДРОГАЗОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ**



Основними критеріями подібності гідрогазодинамічних процесів є **числа Рейнольдса і Маха**.

Рейнольдсу вдалося знайти безрозмірне число, що описує характер потоку в'язкої рідини. Сам вчений одержав його експериментально, провівши виснажливу серію дослідів з різними рідинами, однак незабаром було показано, що його можна вивести і теоретично з законів механіки Ньютона і рівнянь класичної гідродинаміки. Це число, яке тепер називають **числом Рейнольдса** і позначають  $Re$ , характеризує потік і дорівнює

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu}, \quad (8.2)$$

де  $\rho$  і  $\mu$  - густина і динамічний коефіцієнт в'язкості рідини відповідно;  $v$  — характерна швидкість потоку;  $l$  — характерний лінійний розмір.

Режим течії рідини визначається **критичним числом Рейнольдса**  $Re_{KP}$ . При  $Re < Re_{KP}$  можлива тільки ламінарна течія рідини, а при  $Re > Re_{KP}$  течія стає турбулентною. Значення  $Re_{KP}$  залежить від умов течії. Наприклад, для течії в'язкої рідини в круглій циліндричній трубі  $Re_{KP} = 2300$ .

Можна, звичайно, вважати число Рейнольдса чисто експериментальним результатом, однак його можна інтерпретувати і з позиції законів Ньютона. Рідина в потоці має імпульс. Це означає, що рухома рідина прагне продовжити свій рух з колишньою швидкістю. Цьому перешкоджають сили внутрішнього тертя між шарами рідини, які гальмують потік. Саме число Рейнольдса характеризує співвідношення між двома цими силами - **інерції і в'язкості**. Високі значення числа Рейнольдса описують ситуацію, коли сили в'язкості є відносно малими і не здатні згладити турбулентні завихрення потоку. Малі значення числа Рейнольдса відповідають ситуації, коли сили в'язкості гасять турбулентність, роблячи потік ламінарним.

Число Рейнольдса є дуже корисним з погляду моделювання потоків у різних рідинах і газах, оскільки їх поведінка залежить не від значення в'язкості, густини, швидкості і лінійних розмірів елемента потоку, а лише від їх співвідношення, яке виражається числом Рейнольдса. Завдяки цьому можна, наприклад, помістити в аеродинамічну трубу зменшену модель літака і підібрати швидкість потоку таким чином, щоб число Рейнольдса відповідало реальній ситуації повномасштабного літака в польоті. Сьогодні, з розвитком могутньої комп'ютерної техніки, необхідність в аеродинамічних трубах відпала, оскільки повітряні потоки можна змоделювати на комп'ютері.

Зокрема, першим цивільним авіалайнером, повністю спроектованим винятково з використанням комп'ютерного моделювання, став «Боїнг 747». У зв'язку з цим цікаво відзначити, що при проектуванні гоночних яхт і висотних будинків дотепер практикується їх «обкатування» в аеродинамічних трубах.

**Число Маха** – ще одна важлива характеристика течії газу. Число Маха дорівнює відношенню швидкості течії  $v$  до швидкості звуку  $v_{зв}$  у тій самій точці потоку:

$$M = \frac{v}{v_{зв}}. \quad (8.3)$$

Число Маха є також одним з основних критеріїв газодинамічної подібності для випадків, коли не можна нехтувати стисливістю газу. У повітрі стисливість необхідно враховувати при швидкостях  $v > 100 \frac{M}{c}$ , яким відповідає число

$M > 0,3$ . При  $M < 1$  течія називається дозвуковою, при  $M = 1$  - звуковою, а при  $M > 1$  - надзвуковою. Однією з основних особливостей надзвукових течій є утворення ударних хвиль при обтіканні тіл або гальмуванні потоку газу. У результаті дисипації енергії в ударних хвилях виникає хвильовий опір,

який збільшується з ростом числа Маха. Гіперзвукові течії з  $M > 5$  мають низку особливостей, зокрема стають істотними фізико-хімічні перетворення в газі, стисливого в ударній хвилі.

#### 8.4 ФОРМУЛА СТОКСА

Стокс встановив, що за невеликих швидкостей ( $Re < Re_{KP}$ ) модуль сили опору руху тіла в рідинах визначається формулою

$$F = k\eta lv, \quad (8.4)$$

де  $\eta$  - динамічна в'язкість середовища;  $v$  - швидкість руху тіла;  $l$  - характерний розмір тіла;  $k$  - коефіцієнт пропорційності, який залежить від форми тіла. Для кулі, якщо взяти  $l = r$ , коефіцієнт пропорційності дорівнює  $6\pi$ . Таким чином, сила опору руху в рідинах невеличких кульок при невеликих швидкостях

$$F = 6\pi\eta rv. \quad (8.5)$$

Потрібно відзначити, що формула Стокса (8.5) є справедливою за умови, що відстань від тіла до стінок посудини набагато більша за розміри тіла.

*Был этот мир глубокой тьмой окутан.  
Да будет свет! И вот явился Ньютон,  
Но Сатана недолго ждал реванша,  
Пришел Эйнштейн, – и стало все как  
раньше.*

*С.Я. Маршак*

## **9 ОСНОВИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ МЕХАНІКИ**

### **9.1 ОБМЕЖЕНІСТЬ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

Класична механіка (механіка Галілея - Ньютона) описує рух макроскопічних тіл зі швидкостями набагато меншими за швидкість світла  $v \ll c$  (де  $c = 2,99793 \cdot 10^8$  м/с - швидкість світла) з дуже високим ступенем точності.

Розглянемо основні уявлення класичної фізики.

- 1** Простір є трьохвимірним і евклідовим.
- 2** Час не залежить від простору, але пов'язаний з ним законами руху. Так, час вимірюється годинниками – приладами, які використовують певні періодичні процеси, які дають певний масштаб часу. Тому, визначити час безвідносно до якогось періодичного процесу (тобто без зв'язку з рухом) неможливо.
- 3** Розміри твердих тіл (масштаби) і проміжки часу між даними подіями однакові в різних системах відліку. Це відповідає Ньютонівській концепції абсолютності простору – часу, згідно з якою їх властивості не залежать від системи відліку і однакові у всіх системах відліку.
- 4** Принцип відносності Галілея є однією з цеглинок фундаменту класичної фізики. Цей принцип стверджує існування інерціальних систем відліку.

З вищезазначених уявлень випливають **перетворення Галілея для простору – часу**, які встановлюють просторово часовий зв'язок між подіями в різних системах відліку. Нехай система відліку  $K'$  рухається відносно системи  $K$  із сталою швидкістю  $\vec{u}$  вздовж осі  $x$ . Початок відліку часу відповідає моменту, коли початки координат  $O$  і  $O'$  збігаються. Тоді

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t,$$

звідси випливає, що координати тіла є відносними, тобто вони різні в різних системах відліку. Момент часу, в який відбувається подія, однаковий в усіх системах відліку. З перетворення координат випливає закон перетворення швидкостей

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}, \quad (9.1)$$

де  $\vec{v}'$  і  $\vec{v}$  відповідно швидкості тіла в рухомій і нерухомій системах відліку;  $\vec{u}$  - швидкість рухомої системи відліку відносно нерухомої.

- 5** Виконується **принцип відносності Галілея**, тобто всі закони механіки однакові у всіх інерціальних системах відліку, тобто вони є інваріантними відносно перетворень Галілея.
- 6** Виконується **принцип дальності**: взаємодія поширюється миттєво, тобто з нескінченною швидкістю.

При подальшому розвитку фізики виникло питання чи поширюється принцип відносності Галілея на немеханічні явища? Якщо ні, то за допомогою цих немеханічних явищ можна розрізнити інерціальну і неінерціальну системи відліку.

У той час панувала теорія, згідно з якою світло поширюється з певною швидкістю відносно особливого середовища - ефіру, який, в свою чергу, рухається з певною швидкістю відносно певної абсолютної системи, яка перебуває в спокої відносно усіх систем. Якщо якась система відліку

рухається відносно ефіру, то швидкість світла має підкорятись звичайному закону додавання швидкостей, тобто

$$c' = c + u .$$

Справедливість цього припущення вдалося перевірити в

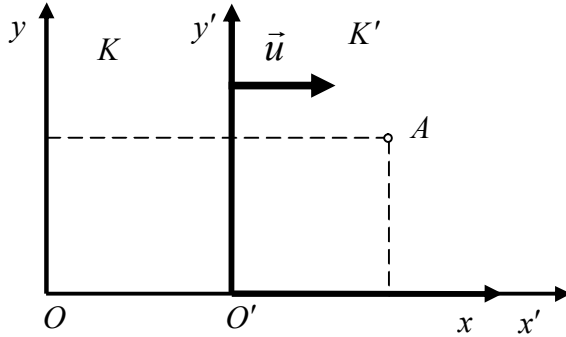


Рисунок 9.1 – До пояснення принципу відносності Галілея

**дослідах Майкельсона і Морлі** (рис.9.2). За допомогою інтерферометра Майкельсона вчені вимірювали швидкість світла у двох перпендикулярних напрямках. При цьому обертання Землі мало привести до того, що світло мало

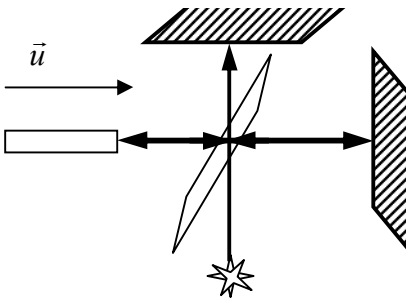


Рисунок 9.2 – Дослід Майкельсона і Морлі

проходити однакові відстані за різні проміжки часу. Але такої різниці часу не було виявлено. Ці досліди багаторазово повторювалися. З'ясувалося, що всупереч існуючим на той час уявленням **швидкість світла однакова у всіх інерціальних системах відліку.**

## 9.2 ПОСТУЛАТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Спеціальна теорія відносності (СТВ) привела до перегляду усіх уявлень класичної фізики, і в основному уявлень про властивості простору і часу. Тому цю теорію можна назвати фізичним вченням про простір і час, оскільки властивості простору і часу в цій теорії розглядаються залежно від фізичних явищ, які в них відбуваються.

А. Ейнштейн, проаналізувавши експериментальні факти, що нагромадилися на той час, **створив спеціальну теорію відносності (СТВ)** - фізичну теорію простору-часу для слабких гравітаційних полів. В основі СТВ лежать **постулати Ейнштейна**.

**Перший постулат СТВ (принцип відносності Ейнштейна)**: усі закони природи однакові у всіх інерціальних системах відліку. Цей постулат є поширенням принципу відносності Галілея на усі фізичні явища.

**Другий постулат СТВ (принцип сталості швидкості світла)**: швидкість світла у вакуумі однакова у всіх інерціальних системах відліку і не залежить від швидкостей руху як джерел, так і приймачів світла. Факт абсолютності швидкості світла був експериментально встановлений у дослідах Майкельсона і Морлі в 80-х роках 19-го століття. Швидкість світла у вакуумі є однією із найважливіших фізичних констант, це **гранична швидкість у природі**.

Глибокий аналіз постулатів СТВ показує, що вони суперечать класичним уявленням про простір і час. Виявляється, що час у різних системах відліку проходить по-різному, отже, проміжок часу між двома подіями залежить від вибору системи відліку. Тобто події одночасні в одній системі відліку, є не одночасними в іншій, але при цьому відносність не суперечить принципів причинності. Маса і лінійні розміри тіла також залежать від швидкості руху. Як і в класичній механіці, так і у СТВ простір і час – однорідні, але в СТВ простір і час – взаємозалежні, взаємопов'язані і утворюють чотиривимірний простір-час. Перехід з однієї інерціальної системи відліку в іншу

тут здійснюється відповідно до перетворень Лоренца, а не Галілея, як у класичній механіці.

### 9.3 ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОРЕНЦА

Розглянемо дві інерціальні системи відліку  $K$  і  $K'$  (рис.9.3). Припустимо, що відбувається певна подія. В системі  $K$  вона характеризується значеннями координат і часу  $x, y, z, t$ ; в системі  $K'$  - значеннями координат і часу  $x', y', z', t'$ . Знайдемо зв'язок між цими величинами. Із однорідності простору і часу випливає, що цей зв'язок має бути лінійним. При вибраному на

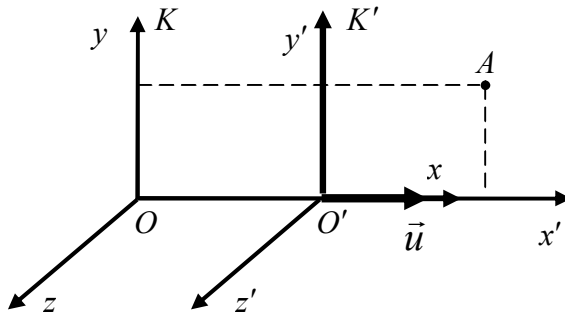


Рисунок 9.3 – До виведення перетворень Лоренца

рисунку 9.3 напрямку координатних осей координати  $y$  і  $y'$  перетворюються в нуль одночасно. Це можливо за умови

$$y = \alpha y',$$

де  $\alpha$  - стала величина. Внаслідок рівноправності систем відліку  $K$  і  $K'$  обернене перетворення повинно мати вигляд

$$y' = \alpha y$$



з тим самим значенням  $\alpha$ , що і при прямому перетворенні. Перемножимо ці два вирази і отримаємо, що  $\alpha = \pm 1$ . Для однаково спрямованих осей потрібно взяти значення  $\alpha = +1$ . Внаслідок цього отримуємо, що

$$y' = y \text{ або } y = y'.$$

Аналогічними будуть перетворення відносно координат  $z$  і  $z'$

$$z' = z \text{ або } z = z'.$$

З цих формул випливає, що значення  $y$  і  $z$  не залежать від  $x'$  і  $t'$  і навпаки. Це означає, що  $x$  і  $t$  є лінійними функціями тільки  $x'$  і  $t'$ .

З рисунка 9.3 бачимо, що точка  $O$  має координату  $x = 0$  в системі  $K$  та  $x' = -ut'$  в системі  $K'$ . Це означає, що вираз  $x' + ut'$  має перетворюватися в нуль одночасно з координатою  $x$ . Для цього перетворення повинно мати вигляд

$$x = \gamma(x' + ut'),$$

де  $\gamma = \text{const}$ .

Внаслідок рівноправності систем відліку має виконуватись обернене співвідношення

$$x' = \gamma(x - ut).$$

Тепер використаємо принцип сталості швидкості світла. Почнемо початок відліку часу в обох системах з того моменту, коли початки координат  $O$  і  $O'$  збігаються. Припустимо, що в момент  $t = t' = 0$  в напрямку осей  $x$  і  $x'$  посилається світловий сигнал, який утворює спалах світла на екрані. Ця подія (спалах) характеризується в системі  $K$  координатою  $x$  і часом  $t$ , а в системі  $K'$  - координатою  $x'$  і часом  $t'$ , при цьому

$$x = ct, \quad x' = ct',$$

оскільки швидкість світла в обох системах однакова. Підставимо ці значення у відповідні формули та отримаємо

$$ct = \gamma(ct' + ut'),$$

$$ct' = \gamma(ct - ut).$$

Перемножимо співвідношення і скоротимо отримане рівняння на  $tt'$ , тоді

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - u^2).$$

Звідси

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

де  $\beta = u/c$ .

Тоді для перетворень координат отримаємо вирази:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Щоб знайти перетворення для часу, виключимо з перетворень координат  $x$  і знайдемо  $t$ . Потім виключимо  $x'$  і знайдемо  $t'$ :

$$t = \frac{t' + (u/c^2)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Запишемо отримані перетворення, які отримали назву **перетворень Лоренца** разом:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \left(\frac{u}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad (9.2)$$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \left(\frac{u}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

За цими формулами відбувається перехід від системи  $K'$  до системи  $K$  і навпаки. Внаслідок рівноправності систем ці перетворення відрізняються тільки знаком перед  $u$ .

При швидкостях, набагато менших за швидкість світла  $\beta \ll 1$ , перетворення Лоренца не відрізняються від перетворень Галілея.

## **9.4 НАСЛІДКИ З ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛОРЕНЦА**

З перетворень Лоренца випливають наслідки, які вступають в протиріччя з повсякденним досвідом. Це протиріччя обумовлене тим, що наш досвід формується у світі, де явища відбуваються за швидкостей набагато менших за швидкість світла. Але у світі елементарних частинок, де рух із субсвітловими швидкостями є дуже поширеним явищем, процеси відбуваються відповідно до перетворень Лоренца.

### **9.4.1 ВІДНОСНІСТЬ ПОНЯТТЯ ОДНОЧАСНОСТІ**

Розглянемо дві інерціальні системи відліку. Припустимо, що в системі  $K$  в точках з координатами  $x_1$  і  $x_2$  ( $x_2 > x_1$ ) відбуваються в момент  $t$  дві одночасні події. Знайдемо різницю моментів  $t'_2$  і  $t'_1$  часу, в які будуть зафіксовані ці події в системі  $K'$ .

Знайдемо ці моменти з перетворень Лоренца:

$$t'_1 = \frac{t - \left(\frac{u}{c^2}\right)x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{t - \left(\frac{u}{c^2}\right)x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Відповідно

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t - \left(\frac{u}{c^2}\right)x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t - \left(\frac{u}{c^2}\right)x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{-\left(\frac{u}{c^2}\right)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} < 0. \quad (9.3)$$

**Таким чином, події одночасні в одній системі виявляються неодноразовими в іншій.**

### 9.4.2 СКОРОЧЕННЯ ДОВЖИН

Порівняємо довжину стрижня в двох інерціальних системах відліку. Припустимо, що стрижень спрямований вздовж осей  $x$  і  $x'$ , які збігаються, і перебуває у спокої в системі  $K'$ . Тоді його довжина в цій системі становитиме

$$l_0 = x'_2 - x'_1,$$

а в системі  $K$ , врахувавши, що

$$l = x_2 - x_1,$$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

отримаємо

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (9.4)$$

Таким чином, **довжина стрижня, який рухається виявляється меншою за довжину стрижня, який перебуває у стані спокою.**

### 9.4.3 ПРОМІЖОК ЧАСУ МІЖ ДВОМА ПОДІЯМИ

Нехай в системі  $K'$  у тій самій точці з координатою  $x'$  відбуваються дві події в моменти часу  $t'_1$  і  $t'_2$ . В системі  $K$  ці події розділені проміжком часу

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Знайдемо проміжок часу  $\Delta t$  між подіями в системі  $K$ . Для цього використаємо перетворення Лоренца для часу (9.2)

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \left(\frac{u}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t'_1 + \left(\frac{u}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

тоді

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Час, визначений за годинником, який рухається разом з тілом, називається **власним часом**:

$$\Delta \tau = \Delta t', \quad (9.5)$$

тоді

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}. \quad (9.6)$$

Бачимо, що **власний час менший за час, визначений за годинником, який рухається відносно тіла.**

#### 9.4.4 ДОДАВАННЯ ШВИДКОСТЕЙ

Компоненти швидкості частинки  $\vec{v}$  в системі  $K$  визначаються співвідношеннями

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

У системі  $K'$  компоненти швидкості частинки  $\vec{v}'$  дорівнюють

$$v'_x = \frac{dx'}{dt}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt},$$

але

$$dx = \frac{dx' + udt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1), \quad dy = dy' \quad (2), \quad dz = dz' \quad (3),$$

$$dt = \frac{dt' + \left(\frac{u}{c^2}\right)dx'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4).$$

Поділимо перше з цих рівнянь (1) на четверте (4):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + udt'}{dt' + \left(\frac{u}{c^2}\right)dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + u}{1 + \left(\frac{u}{c^2}\right)\frac{dx'}{dt'}} ,$$

тоді

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} . \quad (9.7)$$

Поділимо друге і третє рівняння на четверте, отримаємо такі співвідношення:

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} , \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} . \quad (9.8)$$

Коли  $v'_x = c$ , отримаємо

$$v_x = \frac{c + u}{1 + \frac{uc}{c^2}} = c .$$

Отримане співвідношення доводить, що не може швидкість бути більшою за швидкість світла.



## 9.5 ДИНАМІКА СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

### 9.5.1 РЕЛЯТИВІСТСЬКИЙ ІМПУЛЬС

Закони збереження, як і інші закони природи, згідно із першим постулатом СТВ мають виконуватися у всіх інерціальних системах відліку, тобто бути інваріантним відносно перетворень Лоренца. Розглянемо закон збереження імпульсу. Візьмемо абсолютно непружне центральне стикання двох однакових частинок маси  $m$  (рис.9.4). Нехай у системі  $K'$  частинки до стикання летять із швидкостями  $\vec{v}'_1 = \vec{u}$  і  $\vec{v}'_2 = -\vec{u}$ . Модулі обох швидкостей візьмемо однаковими і такими, що дорівнюють

відносній

$K$  і  $K'$

Після швидкості

$K'$

За сумарний

системі  $K'$

після

дорівнює

системі

швидкостей частинок дорівнюють

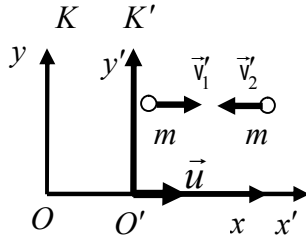


Рисунок 9.4 – До виведення релятивістського

за модулем швидкості систем

$$(v'_1 = v'_2 = u).$$

стикання частинок у системі

дорівнюють нулю.

зазначених умов

імпульс частинок у

зберігається (до і

стикання він

нулю). У цій

компоненти

$$\vec{v}'_{1x} = \vec{u} \text{ і } \vec{v}'_{2x} = -\vec{u}.$$

Перейдемо в систему  $K$ . Згідно із (9.7) отримаємо

$$v'_{1x} = \frac{v'_{1x} + u}{1 + uv'_{1x}/c^2} = \frac{u + u}{1 + uu/c^2} = \frac{2u}{1 + u^2/c^2},$$

$$v'_{2x} = \frac{v'_{2x} + u}{1 + \frac{uv'_{2x}}{c^2}} = \frac{-u + u}{1 + \frac{u(-u)}{c^2}} = 0.$$

Таким чином, до стикання проекція сумарного імпульсу частинок на вісь  $x$  дорівнює

$$mv_{1x} + mv_{2x} = \frac{2mu}{1 + \frac{u^2}{c^2}}.$$

Після стикання частинки в системі  $K'$  перебувають у спокої. Отже, відносно системи  $K$  вони рухаються із швидкістю  $\vec{u}$ . Тому проекція сумарного імпульсу на вісь  $x$  дорівнює  $2mu$ .

Отриманий нами результат означає, що в системі  $K$  закон збереження імпульсу не виконується, якщо вважати, що імпульс дорівнює  $mv'$ . Тобто таке визначення імпульсу застосовне тільки за умови  $v' \ll c$ . Для швидкостей, порівнянних зі швидкістю світла, імпульс має визначатися інакше, але за невеликих швидкостей відповідний вираз має переходити в класичний.

Запишемо імпульс частинки у вигляді

$$\vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Замінімо час  $dt$  на власний час частинки  $d\tau$ :

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau}.$$

Використаємо вираз (9.8) у вигляді  $d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}$ , тоді

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 v \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Таким чином, **релятивістський імпульс частинок, які рухаються із швидкістю  $\vec{v}$** , має вигляд

$$\vec{p} = m\vec{v} = m_0 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.9)$$

### 9.5.2 ЕНЕРГІЯ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ЧАСТИНКИ

У релятивістській механіці другий закон Ньютона в диференціальній формі є застосовним

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Підставимо у це рівняння релятивістський імпульс (9.9) і отримаємо **основне рівняння релятивістської динаміки матеріальної точки**:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left( m_0 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (9.10)$$

Отримаємо релятивістський вираз для кінетичної енергії. Робота, що виконується над тілом, дорівнює зміні його кінетичної енергії:

$$\begin{aligned} dT &= dA, \\ dA &= \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \vec{v} dt = \frac{d}{dt} \left( m_0 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \vec{v} dt = dT, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dT &= \vec{v} d \left( \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \vec{v} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} d(m_0 \vec{v}) + m_0 \vec{v} d \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \right] = \\
 &= \vec{v} \left[ \frac{m_0 d\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \left( \frac{m_0 \vec{v} \left( \frac{\vec{v}}{c^2} \right) d\vec{v}}{\left( 1-\frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Зведемо це співвідношення до загального знаменника:

$$dT = \frac{\left( 1-\frac{v^2}{c^2} \right) m_0 \vec{v} d\vec{v} + \frac{v^2}{c^2} m_0 \vec{v} d\vec{v}}{\left( 1-\frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} = \frac{m_0 \vec{v} d\vec{v}}{\left( 1-\frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} = d \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Після інтегрування отримаємо

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + const.$$

Кінетична енергія має дорівнювати нулю разом із швидкістю частинки, тобто  $v = 0 \Rightarrow T = 0$ :

$$0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-0}} + const \Rightarrow const = -m_0 c^2.$$

Тоді вираз для **кінетичної енергії** набере вигляду

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (9.11)$$

Як випливає з виразу (9.11), закон збереження енергії виконується тільки у випадку, коли частинці приписати, крім кінетичної енергії, додаткову енергію, яка дорівнює  $m_0 c^2$ . Таким чином, **повна енергія частинки** складає

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9.12)$$

Величину ( $E_0$ ) називають **енергією спокою**, вона дорівнює

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (9.13)$$

**Повна енергія** в релятивістській механіці є сумою енергії спокою та кінетичної енергії частинки:

$$E = E_0 + T. \quad (9.14)$$

Повна енергія пов'язана з імпульсом співвідношенням

$$E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (9.15)$$

З формули (9.15) бачимо, що **релятивістська маса** частинки дорівнює

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9.16)$$

Формула Ейнштейна для маси - енергії (9.12) відіграла виняткову роль у фізиці. Вона є узагальненням фундаментального закону збереження енергії. Вона призвела до розуміння, що речовина і поле є різними проявами однієї матеріальної субстанції - енергії.

Саме формула Ейнштейна

$$E = mc^2$$

дозволила зрозуміти та обчислити енергію ядерних реакцій, що стало революцією в енергетиці.

*...Природа часто уявляється нам парадоксальною, оскільки в ХХ сторіччі наука стала більш глибокою. Виникли теорії, які спростовують звичні поняття.*

*Л.Д. Ландау*

## **10 ОСНОВИ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ**

### **10.1 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ**

Спеціальна теорія відносності є справедливою для інерціальних систем відліку. У загальній теорії відносності (ЗТВ) Ейнштейн розповсюдив принципи СТВ на неінерціальні системи відліку. ЗТВ вважають також теорією гравітації. У той час, як наслідки з СТВ блискуче підтвердилися численними дослідженнями, експериментальна перевірка ЗТВ просунулася набагато менше. У сучасному вигляді ЗТВ може зробити лише кілька передбачень, причому до теперішнього часу перевірка жодного з них не привела до остаточного експериментального підтвердження теорії. Хоча потрібно відзначити, що останні спостереження дуже наблизилися до такого підтвердження. Про це написано нижче.

ЗТВ використовує складний математичний апарат, але ми зупинимося лише на її фізичній сутності. Ще з шкільного курсу відомі основні положення теорії тяжіння Ньютона. Згідно з теорією Ньютона гравітаційне поле розповсюджується миттєво, що не узгоджується із СТВ, яка стверджує, що ніяка взаємодія не може передаватися із швидкістю, більшою за швидкість світла. Саме тому знадобилася більш загальна теорія тяжіння (нею стала ЗТВ). У лінійному наближенні (на відносно великих відстанях і для відносно малих мас) ЗТВ переходить в теорію тяжіння Ньютона.

Створювати ЗТВ Ейнштейн разом з Гілбертом почав у 1907р. і закінчив в 1915. Значний внесок у розроблення математичного апарату ЗТВ вніс 1908-1910 роках Мінковський.

ЗТВ ґрунтується на експериментальному факті еквівалентності інертної маси (яка входить до другого закону Ньютона) гравітаційній масі, яка входить до закону всесвітнього тяжіння:

$$m_{gp} = m_{in}, \quad (10.1)$$

де  $m_{gp}$  і  $m_{in}$  - гравітаційна та інертна маси відповідно.

Ейнштейн сформулював цей факт як **принцип еквівалентності мас:** неможливо визначити експериментальним шляхом: знаходиться тіло в гравітаційному полі чи в неінерціальній системі відліку. Дійсно, якщо ми винесемо об'єкт у космос, де гравітація є досить малою, то, якщо прискорення ракети  $\vec{a}$  дорівнює за модулем прискоренню сили тяжіння на Землі  $\vec{g}$  і при цьому спостерігається рух предмета відносно підлоги ракети, прискорений рух буде тим самим. Іншими словами, якщо лабораторія позбавлена вікон, то спостерігач ніколи не зможе відрізнити прискорення, що створюється силою тяжіння від прискорення, яке створюється двигуном ракети.

## **10.2 ЦІКАВІ НАСЛІДКИ ІЗ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ**

### **10.2.1 ЧОРНІ ДІРКИ**

Одним з цікавих наслідків загальної теорії відносності є існування **чорних дірок**. Постулати ЗТВ дозволили Ейнштейну отримати рівняння руху тіла у викривленому чотиривимірному просторі-часі. Розв'язок цих рівнянь у випадку ізольованого сферично симетричного джерела поля маси  $M$  називається рівнянням Шварцшильда. **Прискорення вільного падіння** для такого тіла має вигляд



$$g = \frac{GM}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}}, \quad (10.2)$$

де  $G$  - гравітаційна стала;  $c$  - швидкість світла у вакуумі;  $r$  - відстань до джерела.

Цей вираз відрізняється від Ньютонівського виразу для прискорення вільного падіння. Бачимо, що, коли  $g \rightarrow \infty$ ,  $r$  прямує до

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Величина  $r_g$  називається **гравітаційним радіусом** (так, гравітаційний радіус Сонця -  $r_{gC} \sim 3 \text{ км}$ , гравітаційний радіус Землі -  $r_{gZ} \sim 0,9 \text{ см}$ ). Сфера радіуса  $r_g$  називається **сферою Шварцшильда**.

Друга космічна швидкість в теорії Ньютона дорівнює

$$v_{II} = \sqrt{2G \frac{M}{r}}.$$

Бачимо, що при  $r = r_g$ ,  $v_{II} = c$ .

У випадку, коли сферичне тіло стиснеться до розмірів, менших за цей радіус ( $r < r_g$ ), світло не зможе вийти зі сфери Шварцшильда. Такі об'єкти отримали назву чорних дірок (термін „чорна дірка” був введений у 1968 р. Дж. Уїлером).

Теоретична астрофізика передбачає виникнення чорних дірок у кінці еволюції масивних зірок з масами, більшими за сонячну. Можливим є існування чорних дір іншого походження (реліктові чорні дірки – залишки після Великого вибуху). Так, існує припущення, що в центрі кожної галактики знаходиться одна чи кілька чорних дірок, які утворилися внаслідок злиття

декількох масивних об'єктів. У сучасній астрофізиці спостерігаються об'єкти, які є подвійними зоряними системами, до складу яких (як припускається) входять чорні дірки.

### ***10.2.2 ГЕОМЕТРІЯ І РОЗВИТОК ВСЕСВІТУ***

Загальна теорія відносності обумовила бурхливий розвиток космології як науки. Виходячи з цієї теорії, Ейнштейн у 1917 році запропонував модель стаціонарного Всесвіту, відповідно до якої він являє собою замкнутий чотиривимірний простір-час -(тривимірну сферу) кінцевого об'єму, яка не змінюється з плином часу. Однак ця модель, як виявилось пізніше, не відповідає дійсності, оскільки Всесвіт не стаціонарний, він розширюється.

У 1922 р. Фрідман знайшов розв'язок рівнянь Ейнштейна, припустивши, що речовина розподілена по простору рівномірно. З цього рішення випливало, що Всесвіт не може бути стаціонарним. Він завжди перебуває або у стані розширення, або у стані стискування.

Випромінювання спектрів галактик дозволило в 1929 році Хаббл зробити відкриття фундаментальної важливості. Він встановив, що лінії спектрів усіх галактик, за винятком декількох найближчих, зміщені в червоний бік. Червоне зміщення у спектрах галактик можна пояснити ефектом Доплера, а це приводить до висновку, що такі галактики віддаляються від нас, і їх швидкість можна розрахувати за цим зміщенням. Крім того, з'ясувалося, що на чим більший відстані знаходиться від нас галактика, тим сильніше зміщені в червону область лінії її спектра, тобто чим далі від нас знаходиться галактика, тим з більшою швидкістю вона віддаляється від нас. Вивчивши питання докладно, Хаббл встановив, що червоне зміщення у спектрах галактик пропорційне відстані до них. Це дозволило йому сформулювати закон червоного зміщення галактик (**закон Хаббла**), який є одним з фундаментальних законів Всесвіту: усі галактики мають позитивні швидкості, пропорційні відстаням до них:

$$v = H \cdot r, \quad (10.3)$$

де  $H$  – стала Хаббла.

Закон Хаббла приводить з неминучістю до висновку, що всі галактики або шматки матерії, з яких вони сформувалися, вилетіли одночасно з порівняно малого об'єму, тобто наш Всесвіт виник у результаті вибухового процесу – **Великого Вибуху**. Розширення Всесвіту має ізотропний характер.

Величина сталої Хаббла характеризує швидкість розширення світового простору і є однією з основних світових констант. Визначення цієї константи – одна з найскладніших задач експериментальної астрономії. Її значення визначає вік Всесвіту, оскільки величина сталої Хаббла залежить тільки від часу.

### ***10.3 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ***

У свій час Ейнштейн запропонував **три способи експериментальної перевірки ЗТВ** - прецесія перигелію орбіт планет Сонячної системи, зокрема Меркурія, відхилення електромагнітних хвиль поблизу таких масивних тіл, як Сонце, гравітаційне червоне зміщення.

Існування чорних дірок та реєстрація гравітаційних хвиль є найвагомішими доказами правильності ЗТВ.

#### ***10.3.1 ПРЕЦЕСІЯ ПЕРИГЕЛІЮ ОРБИТИ МЕРКУРІЯ***

Як виявив ще Ньютон, гравітаційні сили змінюються з відстанню як  $\frac{1}{r^2}$ . Це можна перевірити, причому з великою точністю, спостерігаючи за рухом планет. Ньютон показав, що якщо гравітаційна сила обернено пропорційна квадрату відстані,

то еліптичні орбіти планет не повинні змінюватися в часі. Зокрема, найближча до Сонця точка еліпса (вона і називається перигелієм) не повинна змінювати свого положення відносно «нерухомих» зірок. Звичайно існують невеликі відхилення траєкторії від точно еліптичних орбіт, обумовлені тим, що на дану планету діють інші планети. Але ці відхилення дуже малі у порівнянні з гравітаційною силою Сонця. Крім того, розроблені надійні математичні методи розрахунку таких відхилень. Спостереження переміщення перигелію свідчило б, що показник ступеня у законі всесвітнього тяжіння не дорівнює точно 2.

Близько 100 років тому було виявлено мале переміщення перигелію Меркурія, яке навіть з урахуванням збурень інших планет не вдалося пояснити повністю. Зокрема, було висунуте припущення про існування планети між Меркурієм і Сонцем, яку заздалегідь назвали Вулканом. Її безуспішно шукали протягом багатьох років. Перигелій Меркурія прецесіює з дуже малою швидкістю і орбіта його руху нагадує еліпс, який повільно повертається. Після врахування впливу з боку всіх інших реальних планет виявилось, що залишкова прецесія складає  $43,11''$  за сторіччя. Це призвело до висновку, що закон всесвітнього тяжіння є не зовсім точним. Розрахунок проведений Ейнштейном у рамках ЗТВ дає для залишкової прецесії значення  $43,03''$ . Це приголомшливий збіг, який свідчить на користь ЗТВ.

Подібні залишкові прецесії мають і інші планети Сонячної системи.

### ***10.3.2 ВИКРИВЛЕННЯ СВІТЛОВИХ ПРОМЕНІВ СОНЦЕМ***

Загальна теорія відносності передбачає, що коли промінь проходить поблизу масивного тіла, його шлях має злегка викривлюватися. Такий результат можна якісно зрозуміти, якщо згадаємо, що електромагнітне випромінювання, у тому числі світло, має енергію, і цій енергії відповідає маса, згідно із виразом

$$\varepsilon = mc^2.$$

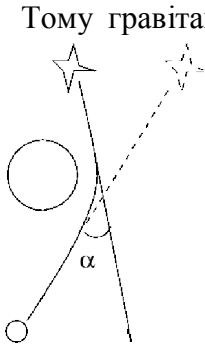


Рисунок 10.1 -  
Відхилення променя  
зірки у гравітаційному  
полі Сонця

Тому гравітаційне поле діє на світло і викривляє його траєкторію так само, як і на частинку, що пролітає мимо масивного тіла. Оскільки світло поширюється з величезною швидкістю, то цей вплив виявляється лише протягом короткого часу. Тому відхилення світла від прямолінійного шляху є малим навіть при проходженні біля такого масивного тіла, як Сонце, але воно є (рис.10.1). Під час повного сонячного затемнення в 1919 р. астрономам вдалося спостерігати зірку, сховану за крайкою Сонця. Це свідчило про те, що промені світла викривляються під

дією гравітаційного поля Сонця.

Вимірювання дали відхилення  $\sim 2''$  (розрахунки Ейнштейна дали  $1,75''$ ).

### 10.3.3 ГРАВІТАЦІЙНЕ ЧЕРВОНЕ ЗМІЩЕННЯ

Із загальних уявлень ми знаємо, що якщо випустити з рук будь-який предмет, то, падаючи вниз, він буде у полі тяжіння збільшувати свою швидкість і кінетичну енергію. Аналогічно енергія світла, яке поширюється у гравітаційному полі, буде збільшуватися, оскільки світло має масу, пов'язану з енергією випромінювання. Як ми знаємо, збільшення кінетичної енергії падаючого тіла або частинки обумовлене зростанням швидкості. Однак, оскільки світло завжди поширюється зі швидкістю  $c$ , збільшення його енергії пов'язане зі збільшенням частоти світлової хвилі. Було встановлено також, що якщо напрямок поширення світла протилежний до напрямку вектора

напруженості гравітаційного поля, то світло буде втрачати енергію, а його частота буде зменшуватися. Дійсно, виявилось, що видиме світло, яке випромінюється Сонцем, має у гравітаційному полі Землі меншу частоту  $\nu$  (або більшу довжину хвилі  $\lambda$ ). Це означає, що спектральні лінії зміщуються в гравітаційному полі до червоного кінця спектра. Величина цього зміщення дуже мала, але її можна виміряти. Виявилось, що гравітаційне червоне зміщення, визначене експериментально

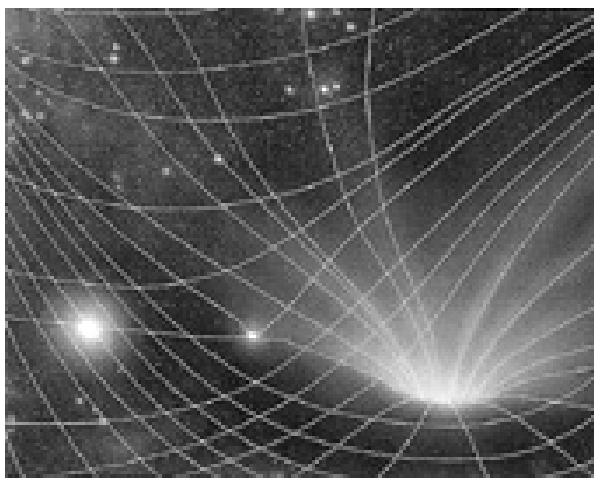


Рисунок 10.2 - Графічна ілюстрація викривлення простору - часу під дією матеріальних тіл одне з основних передбачень загальної теорії відносності. Зліва - невеличка воронка, яка утворилася під дією Сонця; в центрі – викривлений простір-час більш масивної нейтронної зірки; справа - глибока воронка без дна – чорна дірка

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2,5 \cdot 10^{-15} \text{ з точністю до } 10\%, \text{ збігається зі значенням,}$$

передбаченим ЗТВ. Цю неймовірно малу зміну частоти вдалося виміряти за допомогою ефекту Мессбауера.

ЗТВ передбачає також наявність **гравітаційних хвиль**. Як прискорений рух зарядженої частинки супроводжується

електромагнітним випромінюванням, так і масивне тіло, яке рухається в гравітаційному полі має випромінювати гравітаційні хвилі. Відзначимо також, що ЗТВ передбачає викривлення чотиривимірної геометрії простору-часу, так званого світу Мінковського. У рамках ЗТВ поява гравітації пов'язується саме з викривленням простору-часу.

У ЗТВ всі гравітаційні ефекти приписуються неевклідовому характеру геометрії Всесвіту, чотиривимірній геометрії викривленого простору-часу. А це і є криволінійна геометрія Рімана для великих просторів. Відомо також, що Ейнштейн до самої смерті намагався обґрунтувати ідею, що не тільки гравітацію, але і весь фізичний Всесвіт можна цілком описати на основі однієї лише геометрії. Ця ідея виникла ще у Стародавній Греції. Платон говорив: «Бог - це геометр».

#### ***10.3.4 СУЧАСНІ ПІДТВЕРДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ***

Згідно з загальною теорією відносності наявність масивного тіла немовби продавлює простір-час і рівномірність цієї незвичайної тканини порушується. Як вважає сучасна астрофізика, чорна дірка, яка виникає внаслідок колапсу зірки, що обертається, має обертатися навколо своєї осі з величезною швидкістю. Масу чорної дірки можна виявити за рухом газу і зірок, які знаходяться поряд з ними. Газоподібний матеріал, який перетікає від зірки до чорної дірки створює диск, що закручується. Цей диск розігрівається настільки сильно, що рентгенівські промені, які при цьому випромінюються, можна спостерігати за допомогою рентгенівських телескопів на відстанях, більших за 10 тис. світлових років. За допомогою рентгенівської обсерваторії Rossi X-ray Timing Explorer, яку було виведено на орбіту Землі 30 грудня 1995 року, вчені з Массачусетського технологічного інституту всі ці роки реєстрували **жорстке рентгенівське випромінювання від системи чорної дірки GRO J1655-40**, яка за оцінками вчених має масу, більшу за масу Сонця у 6,5 разів. Під час

такого тривалого періоду спостережень вчені виявили квазіперіодичні осциляції рентгенівського випромінювання. Це відкриття, як вважають вчені, дозволить визначити параметри обертання чорної дірки і її масу.

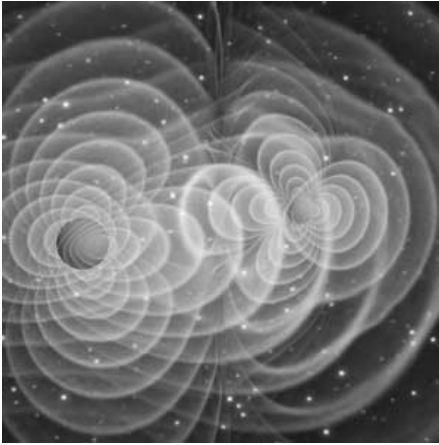


Рисунок 10.3 – Модель картини гравітаційних хвиль, викликаних злиттям двох

подорожували між Землею і космічним зондом «Кассіні», який прямує до системи Сатурна. У цей час наша планета, космічний апарат і Сонце опинилися на одній прямій лінії. Тому радіохвилі проходили поблизу Сонця. Вимірювана величина частотного зсуву збіглася з висновками Ейнштейна з точністю до 0,05%, тоді як до цього точність вимірювань гравітаційного зсуву складала 0,1%

Відомо, що ЗТВ передбачає існування **гравітаційних хвиль**. Уже створено обсерваторію гравітаційних хвиль на базі лазерного інтерферометра (LIGO) національного фонду науки в Хенфордді (штат Вашингтон), яка сканує космос у пошуках гравітаційних хвиль. Завдяки моделюванню на суперкомп'ютері NASA Columbia вдалося розв'язати найскладнішу астрофізичну задачу – створення 3D - моделі злиття двох чорних дірок. При зіткненні таких об'єктів простір навколо них тремтить та поширює гравітаційні хвилі зі швидкістю світла. Форму таких

За допомогою європейської і американської космічних обсерваторій Ньютон і Чандра, астрономи спостерігали, як **супермасивна чорна дірка торкнулася зірки і поглинула її шматок**. Зірка почала розпадатися. Інцидент відбувся на відстані від нашої планети в 25 тис. світлових років.

У червні 2002 дослідники з університетів Павії, Болоньї і Риму виміряли зсув частоти радіохвиль, які



хвиль змодельовала NASA. Тепер вчені знають що шукати. Ми стоїмо на порозі відкриття гравітаційних хвиль і маємо одержати зовсім нове уявлення про Всесвіт. Експериментальне відкриття гравітаційних хвиль буде остаточним доказом справедливості загальної теорії Ейнштейна.

Для підтвердження ЗТВ дослідники NASA у співпраці з колегами Стенфордського університету підготували і запустили супутник **Gravity Probe B**, метою якого було дослідження гравітаційного поля Землі. Це відбулося 20 квітня 2004 р. Протягом 17 місяців супутник збирав необхідні відомості. Після цього групі вчених під керівництвом професора Стенфордського університету Еверітта знадобилося близько 18 місяців для аналізу зібраних даних. Попередні висновки вчених виглядають так. Встановлено найголовніше, а саме - існування ефектів, які передбачає ЗТВ. Це наявність геодезичної прецесії, яка виникає внаслідок викривлення простору Землею. Її величина збіглася з теоретичним значенням з точністю 1%. Крім того, зафіксовано прецесію за рахунок захоплення простору Землею під час свого обертання. Таким чином, як вважають вчені, справедливість ЗТВ не викликає сумніву.

#### ***10.4 ВИСНОВКИ З РОЗГЛЯДУ ОСНОВ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ***

Як було зазначено раніше, загальна теорія відносності узагальнила основні ідеї СТВ і розповсюдила їх на неінерціальні системи відліку. Підіб'ємо деякі **підсумки** розгляду **основ теорії відносності**:

- 1 Під час розроблення постулатів СТВ Ейнштейн відмовився від трьох основних постулатів Ньютона - уявлень про абсолютний простір і час, закону додавання швидкостей і закону збереження маси, замінивши останній узагальненим законом збереження маси-енергії.
- 2 Ніяке матеріальне тіло в жодній системі відліку не може мати швидкості, більшої або такої, що дорівнює швидкості світла у вакуумі. До речі це означає, що швидкість світла інваріантна. Згідно з СТВ і ЗТВ, ніякий сигнал не може

бути переданий з фазовою швидкістю, що перевищує швидкість світла  $c$ .

- 3 Послідовність подій у часі з погляду різних спостерігачів залежить від їх відносного руху. Однак ніякий спостерігач, незалежно від способу руху, не може зареєструвати наслідок раніше за його причину.
- 4 Вимірювання довжини предмета спостерігачем, що рухається відносно нього, дає менше значення, ніж вимірювання тієї самої довжини спостерігачем, нерухомим відносно предмета (скорочення довжин). Скорочується тільки розмір предмета уздовж напрямку руху. Поперечні значення залишаються незмінними.
- 5 Спостерігач, який рухається відносно деякого годинника, встановить, що він йде повільніше за точно такий самий годинник, який не рухається в системі відліку, що рухається разом із спостерігачем (уповільнення перебігу часу).
- 6 Тіло, що рухається відносно спостерігача, має масу, більшу ніж таке саме тіло, яке відносно спостерігача перебуває у стані спокою.
- 7 Повна енергія тіла дорівнює сумі його власної кінетичної енергії. Повна енергія визначається співвідношенням  $E = mc^2$ .
- 8 Експериментально перевірені такі передбачення ЗТВ: прецесія перигелію орбіти Меркурія, викривлення світлових променів при проходженні їх поблизу Сонця, геодезична прецесія Землі та прецесія за рахунок захоплення простору Землею під час свого обертання. Рентгенівське сканування Всесвіту дало дуже вагомні докази на користь існування чорних дірок.
- 9 Гравітаційне червоне зміщення є прямим наслідком принципу еквівалентності мас і того, що світло має масу. Цей самий ефект обумовлює і сповільнює хід годинника у гравітаційному полі.
- 10 Помітимо також, що в основі ЗТВ лежить СТВ.