МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КУРС ЛЕКЦІЙ З МЕХАНІКИ

Суми
Вид-во СумДУ
2007

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КУРС ЛЕКЦІЙ З МЕХАНІКИ

для студентів інженерного факультету денної та заочної форм навчання

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри
загальної та
експериментальної фізики як
курс лекцій з механіки
Протокол №9 від 30.01.2007 р.

Суми
Вид-во СумДУ
2007

Курс лекцій з механіки/ Укладач В.М. Ігнатенко. -
Суми: Вид-во Сум ДУ, 2007.- 180 с.

Кафедра загальної та експериментальної фізики

ЗМІСТ

...Фізика - це наука про всі надзвичайно могутні сили: про магнетизм, про електрику, гравітацію, світло, звук, космічні випромінювання... Фізика розкриває тайни Всесвіту. Як же можна її не любити?

Д. Френсіс “Подвійна обережність”

1 ВСТУП

1.1 ПРЕДМЕТ ВИВЧЕННЯ ФІЗИКИ

Фізика вивчає найбільш загальні властивості матерії і форми її руху (механічну, теплову, електромагнітну, ядерну і т.п.). Закони фізики діють не тільки на Землі, вони панують і у всьому Всесвіті, відбиваючи у такий спосіб матеріальну єдність світу.

На початку розвитку науки все знання про природу відносилося до фізики (давньогрецьке слово "фісіс" означає "природа"). Саме фізика є основою всіх природничих наук. Оскільки оточуючий нас світ є дуже складним і різноманітним у своїх проявах, то в процесі його пізнання з фізики виділилися і сформувалися в самостійні науки: хімія, біологія, астрономія, географія, геологія та інші.

Фізика містить у собі багато розділів залежно від предмета і способу вивчення. По-перше, фізику поділяють на класичну і некласичну. **Класична фізика** ґрунтується на законах Ньютона (механіка), класичних законах термодинаміки, які сформульовані для ізольованих систем, законах Максвела для електродинаміки і законах геометричної та хвильової оптики. **Некласична фізика** виникла і стрімко розвивалася, починаючи з перших років XX сторіччя. Це насамперед **релятивістська механіка**, яка є механікою великих $\left(v \leq c\right)$ швидкостей, це **загальна теорія відносності**, яка описує викривлення простору-часу поблизу масивних об’єктів. З іншого боку, **квантова механіка** (фізика мікросвіту) проникла практично в усі галузі класичної фізики, утворивши відповідні розділи, такі, як квантова електродинаміка, квантова оптика і т. ін. Крім того, приблизно із середини XX сторіччя починається розвиток фізики **відкритих нелінійних систем**, одним з найвідоміших розділів якої стала **синергетика** – теорія відкритих дисипативних систем, які самочинно ускладнюються.

1.2 ФІЗИЧНА КАРТИНА СВІТУ

Дивовижно, що людина умудряється жити в просторі і часі, часто не маючи ні простору і ні хвилини вільного часу.

Фелікс Кривин

У процесі розвитку фізики створюється **фізична картина світу**, яка є основою, стрижнем природничонаукової картини світу. Кожному етапу розвитку науки відповідає своя фізична картина світу. Вона ґрунтується на концепціях про простір і час.

Увесь існуючий матеріальний світ безмежний у часі та просторі і нескінченно різноманітний за формами, яких набирає матерія в своєму розвитку називають **Всесвітом.** Видима частина Всесвіту – це Всесвіт, який вивчає астрономія, є частиною оточуючого нас світу, яка є доступною для дослідження існуючими астрономічними приладами. З розвитком науки і техніки стають доступними для досліджень усе більш віддалені області Всесвіту.

Неважко зробити висновок з визначення Всесвіту, якими надзвичайно важливими є поняття простору і часу. Потрібно відзначити, що згідно з уявленнями сучасної фізики простір і час не є незалежними, а утворюють єдиний часово – просторовий континуум.

Необхідно також підкреслити, що нижченаведені властивості простору і часу встановлені для найближчої до Землі частини Всесвіту на даний момент часу.

1.2.1 ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРОСТОРУ

1 *Однорідність.* Однорідність простору припускає „рівноправність” усіх точок простору та однаковість законів природи щодо паралельного перенесення. З однорідності простору випливає закон збереження імпульсу.

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$$

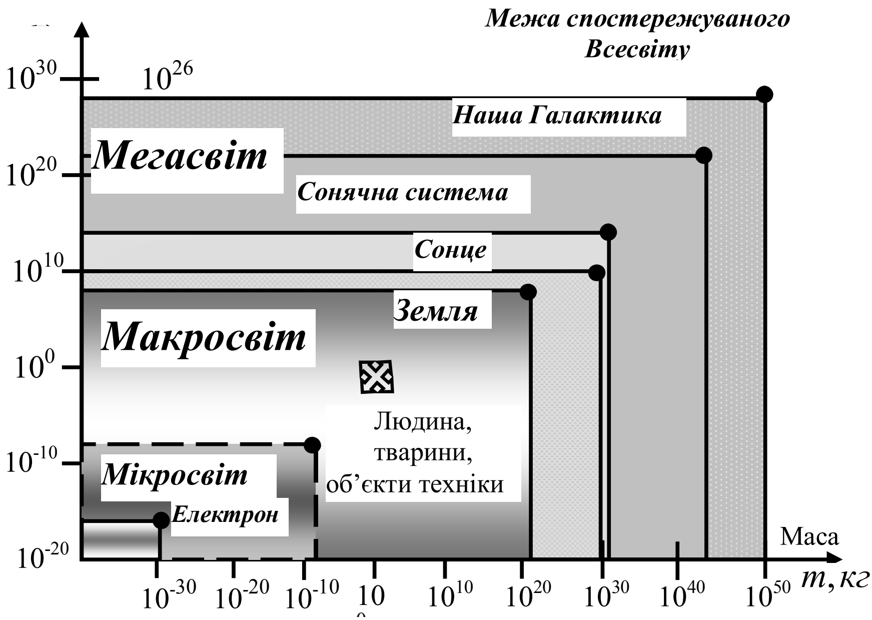


Рисунок 1.1 – Масштаби мікро-, макро- та мегасвітів

2 *Ізотропність.* Ізотропність простору означає, що в просторі немає виділених напрямків і поворот на будь-який кут не змінює законів природи. Ізотропність простору призводить до закону збереження моменту імпульсу.

3 *Безперервність* простору означає, що між будь-якими двома точками, як близько вони б не знаходилися, завжди є третя.

4 Евклідовість. Ознакою евклідовості є можливість побудови в просторі декартових прямокутних координат. Наш простір є евклідовим тільки в наближенні, тому що за наявності великих гравітаційних полів його евклідовість порушується (загальна теорія відносності Ейнштейна).

5 *Тривимірність* простору означає, що положення будь-якої

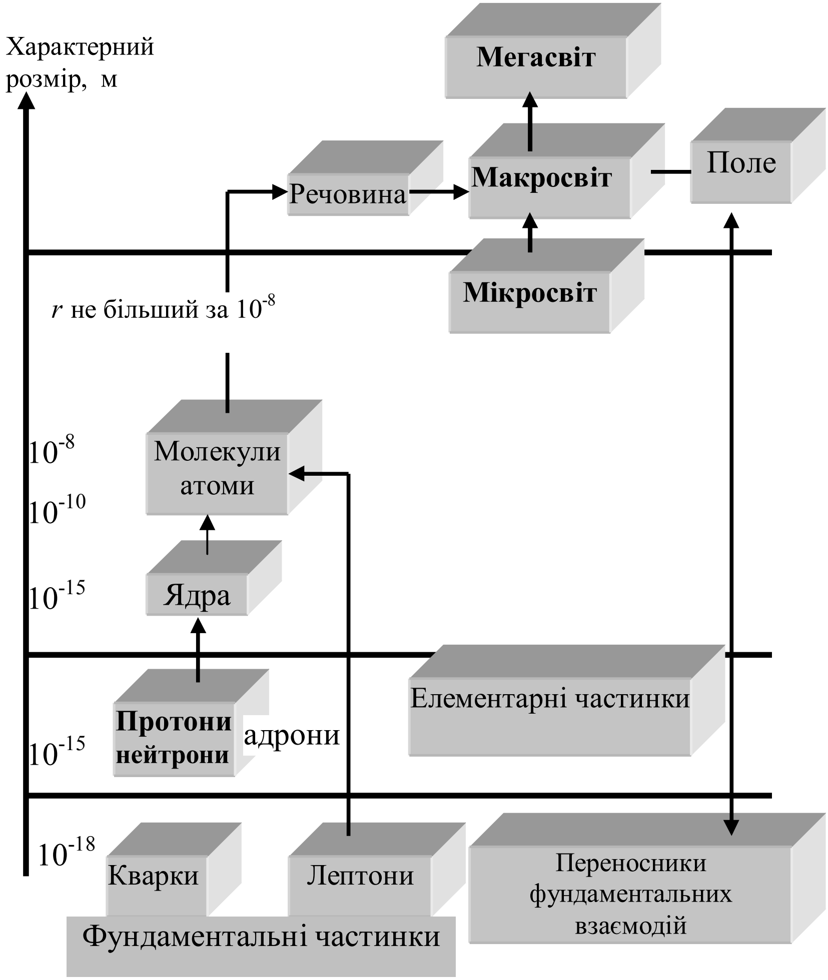


Рисунок 1.2 - Структурні рівні будови матерії у фізиці

точки можна однозначно визначити за допомогою трьох дійсних чисел (координат).

Якими ж відстанями оперує сучасна фізика? „Розмістимо” весь Всесвіт на одній схемі, як зображено на рис.1.1. Для цього скористаємося логарифмічною шкалою. Видно, що живі істоти займають на цій шкалі незначний проміжок.

Виявляється, що характер фізичних законів визначається масштабом досліджуваних явищ (рис.1.2). Так на відстанях порядку розмірів атомів і ядер визначальними є закони квантової фізики (**мікросвіт**).

До **макросвіту** належать: клітина, людина, наша планета. Закони макросвіту багато в чому обумовлюються законами Ньютонівської (класичної) механіки.

До **мегасвіту** входять: наша Зоряна система, Галактика і Всесвіт. Тут царюють закони спеціальної і загальної теорії відносності, гравітаційної взаємодії.

1.2.2 ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧАСУ

1 Однорідність. Однорідність часу виявляється в тому, що за однакових умов у будь-які моменти часу усі процеси в системі будуть проходити однаково. Відображенням факту однорідності часу є **закон збереження енергії**.

2 Безперервність часу означає, що між будь-якими двома проміжками часу (подіями), як близько вони б не знаходилися, завжди є третій (подія).

3 Односпрямованість (необоротність) часу є наслідком II закону термодинаміки – закону зростання ентропії.

З якими відрізками часу оперує сучасне природознавство? Розмістимо увесь Всесвіт в одній таблиці. За основу виберемо логарифмічну шкалу.

ТАБЛИЦЯ ЧАСУ

Опорні точки схеми	**Час, роки**	**Час, секунди**
Вік Всесвіту	$13{,}7 \cdot 10^9$	$4{,}3 \cdot 10^{17}$
Вік Землі	$4{,}5 \cdot 10^9$	$1{,}4 \cdot 10^{17}$
Зародження життя	$4 \cdot 10^9$	$1{,}26 \cdot 10^{17}$
Поява земноводних	$2{,}5 \cdot 10^8$	$7{,}5 \cdot 10^{15}$
Перші ссавці	$1{,}7 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^{15}$

Поява людини	$2\cdot10^6$	$6\cdot10^{13}$
1 рік	-	$3\cdot10^7$

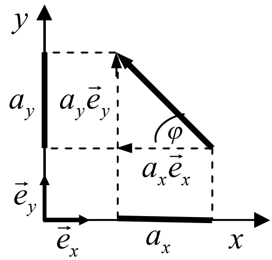


Рисунок 1.3 – Проекції вектора на осі координат

1.3 НАЙБІЛЬШ ПОШИРЕНІ МАТЕМАТИЧНІ ОПЕРАЦІЇ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ В КУРСІ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ

Неможливо зрозуміти і вивчити фізику, не володіючи основами математики. Протягом величезного проміжку часу аж до кінця 19-го сторіччя розвиток математики диктувався потребами фізики. Не випадково творцями диференціального та інтегрального обчислення були видатні вчені – фізики (Ньютон, Ейлер та ін.).

Розглянемо основні математичні поняття та операції, які ми будемо найчастіше використовувати під час вивчення курсу загальної фізики.

1.3.1 ВЕКТОРИ

Фізичні величини поділяють на скалярні та векторні. **Вектор** – це відрізок прямої, напрямок якого характеризується точками початку і кінця. **Графічно** напрямлені вектори позначають стрілкою.

Вектори $-\vec{a}$ і $\vec{a}$ відрізняються тільки за напрямком (вони спрямовані протилежно).

Проекція вектора (рис.1.3). Нехай вектор $\vec{a}$ утворює з віссю координат x кут φ, тоді величина

$$a_x = a\cos\varphi \qquad (1.1)$$

називається проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь x. Проекція позначається тією самою буквою, що і вектор з додаванням індексу, який вказує напрямок, на який проектується вектор.

Проекція вектора – це величина алгебраїчна. У випадку, коли вектор утворює з віссю координат гострий кут, то $a_x > 0$, в іншому випадку - $a_x < 0$.

Найчастіше у цьому розділі використовують прямокутну **декартову систему координат.** Це система координат на площині чи в просторі, із взаємно перпендикулярними осями та однаковими масштабами по осях. Будь-який вектор можна зобразити у такій системі координат з використанням одиничних векторів $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ (ортів):

$$\vec{e}_x^{\,2} = \vec{e}_y^{\,2} = \vec{e}_z^{\,2} = 1, \tag{1.2}$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0, \tag{1.3}$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y. \tag{1.4}$$

Можна записати вектор $\vec{a}$ за допомогою проекцій вектора на координатні осі:

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z, \tag{1.5}$$

де a_x, a_y, a_z - проекції (компоненти) вектора $\vec{a}$.

Величини a_x, a_y, a_z є сторонами прямокутного паралелепіпеда, в якому велика діагональ є вектором $\vec{a}$. Тому має місце співвідношення

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{1.6}$$

Радіусом-вектором $\vec{r}$ точки називають вектор, проведений з початку координат у дану точку. Його проекції на координатні осі

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z\ . \qquad (1.7)$$

Тоді

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\ . \qquad (1.8)$$

Модуль радіуса-вектора можна визначити із співвідношення

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2\ . \qquad (1.9)$$

Розглянемо низку операцій, які можна виконувати з векторами.

1 Додавання і віднімання векторів (рис.1.4) $\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$. Додавання і віднімання векторів виконується геометрично за правилом трикутника (паралелограма). Можна виразити доданок векторів через їх компоненти. **Модуль** результуючого вектора дорівнює

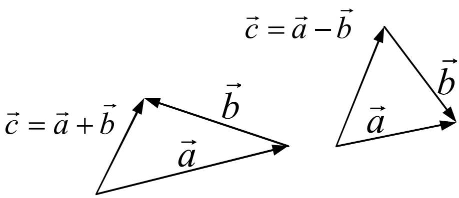


Рисунок 1.4 – Додавання і віднімання векторів

$$c^2 = (a_x \pm b_x)^2 + (a_y \pm b_y)^2 + (a_z \pm b_z)^2 , \qquad (1.10)$$

тоді сам **вектор** можна записати

$$\vec{c} = (a_x \pm b_x)\vec{e}_x + (a_y \pm b_y)\vec{e}_y + (a_z \pm b_z)\vec{e}_z\ . \qquad (1.11)$$

Ці формули є аналітичними виразами правила додавання векторів.

2 Добуток векторів:

а) при **множенні вектора $\vec{a}$ на скалярну величину β** ($\beta > 0$ або $\beta < 0$) вектор $\beta\vec{a}$ має модуль, який дорівнює

$$\left|\beta \cdot \vec{a}\right| = \left|\beta\right| \cdot \left|\vec{a}\right| = \left|\beta\right| \cdot a \,. \tag{1.12}$$

Його напрямок збігається з напрямком вектора $\vec{a}$ за умови $\beta > 0$ і спрямований у протилежний бік, коли $\beta < 0$;

б) скалярний добуток двох векторів

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cdot \cos\alpha \text{ -} \tag{1.13}$$

скалярна величина. Скалярний добуток двох взаємно перпендикулярних векторів дорівнює нулю. Скалярний добуток має властивість комутативності

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \,. \tag{1.14}$$

Скалярний добуток двох векторів можна виразити через їх проекції:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad \vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \,; \tag{1.15}$$

в) **векторний добуток двох векторів**

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}\vec{b}\right] \tag{1.16}$$

можна розглядати як новий вектор, модуль якого дорівнює (рис.1.5)

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab \cdot \sin\alpha \,, \tag{1.17}$$

де S - площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Напрямок вектора $\vec{c}$ перпендикулярний до площини $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ та визначається правилом свердлика (правої руки) (див. рис. 1.6).

Векторний добуток паралельних векторів дорівнює нулю, зокрема $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

Векторний добуток не комутативний, тобто

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right). \qquad (1.18)$$

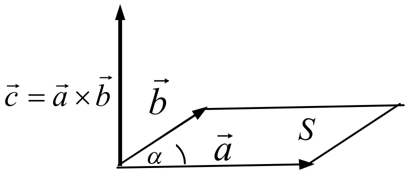


Рисунок 1.5 – Векторний добуток двох векторів

Векторний добуток двох векторів можна знайти через їх координати так:

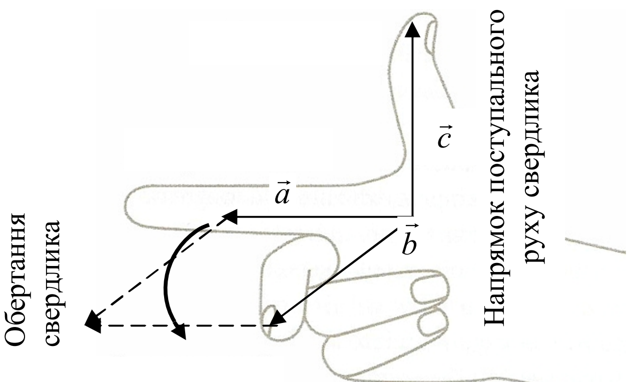


Рисунок 1.6 - Правило свердлика (правої руки)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_y b_z-a_z b_y\right)\vec{e}_x+\left(a_z b_x-a_x b_z\right)\vec{e}_y+\left(a_x b_y-a_y b_x\right)\vec{e}_z, \qquad (1.19)$$

або за допомогою визначників

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{e}_z ; \tag{1.20}$$

г) змішаний добуток

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} . \tag{1.21}$$

Це скаляр, модуль якого дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих трьох векторах і дорівнює значенню визначника

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} . \tag{1.22}$$

Коли вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є компланарними (тобто лежать в одній площині), то $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = 0$;

д) подвійний векторний добуток

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right). \tag{1.23}$$

Отриманий вектор лежить у площині $\left(\vec{b}, \vec{c} \right)$.

1.3.2 ОПЕРАТОРИ

Оператор позначає певну математичну операцію; виконуючи її, ми отримуємо замість даної функції певну істотно іншу функцію.

Наприклад, оператор $\dfrac{\partial}{\partial x}$, застосований до функції $f(x, y, z)$, дає частинну похідну за x.

Векторний оператор Гамільтона (набла)

Застосування формул векторного аналізу значно спрощується, якщо ввести векторний диференціальний оператор, який має назву набла. Цей оператор являє собою вектор з компонентами

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \tag{1.24}$$

Тоді

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z . \tag{1.25}$$

Сам по собі цей вектор не має змісту. Але в поєднанні із скалярною або векторною функцією, на яку оператор набла символічно помножується, він набирає змісту. Використовуючи вектор ∇, потрібно пам'ятати, що він є диференціальним оператором, який діє на всі функції, що знаходяться справа від нього. Тому під час виконання перетворень, до складу яких входить ∇, потрібно враховувати як правила векторної алгебри, так і правила диференціального обчислення.

1 Градієнт функції. Якщо вектор ∇ помножити на скаляр, то внаслідок цього отримаємо вектор

$$\nabla \varphi \equiv \mathrm{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z , \tag{1.26}$$

який отримав назву **градієнта функції**.

Градієнт функції у даній точці напрямлений у бік її максимального зростання і за модулем дорівнює швидкості зростання функції у даному напрямку.

2 Дивергенція вектора. Якщо вектор ∇ помножити скалярно на вектор $\vec{U}$, то отримаємо скаляр

$$\nabla \cdot \vec{U} \equiv \mathrm{div}\vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \tag{1.27}$$

який називається **дивергенцією вектора** $\vec{U}$.

3 Ротор вектора. Якщо помножити векторно вектор ∇ на вектор $\vec{U}$, то отримаємо інший вектор з компонентами

$$\nabla \times \vec{U} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right), \tag{1.28}$$

які збігаються з компонентами **ротора вектора** $\vec{U}$:

$$\nabla \times \vec{U} \equiv \mathrm{rot}\vec{U}. \tag{1.29}$$

Ротор можна записати, скориставшись записом векторного добутку,

$$\nabla \times \vec{U} \equiv \mathrm{rot}\vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix}. \tag{1.30}$$

3 Оператор Лапласа (лапласіан). Якщо вектор ∇ скалярно помножити на вектор ∇, то отримаємо оператор Лапласа

$$\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1.31}$$

4 Циркуляція вектора

Циркуляція (рис.1.7) будь-якого вектора $\vec{U}$ за довільним замкнутим контуром $Г$ дорівнює

$$\oint_{Г} \vec{U} d\vec{l} = \oint_{Г} U_l dl , \qquad (1.32)$$

де U_l - проекція вектора $\vec{U}$ на напрямок $\vec{l}$.

5 Потік вектора $\vec{U}$ через площу S дорівнює

$$\Phi_{\vec{U}} = \int_S \vec{U} d\vec{S} = \int_S U_n dS , \qquad (1.33)$$

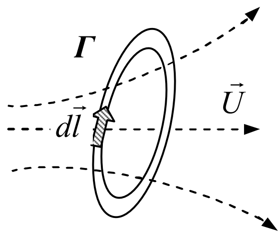


Рисунок 1.7 – Циркуляція вектора $\vec{U}$ по замкнутому контуру $Г$

де U_n - проекція вектора $\vec{U}$ на напрямок нормалі до площі dS , який збігається з напрямком вектора $d\vec{S}$.

Потік вектора – це алгебраїчна величина, його знак залежить від вибору напрямку нормалі до елементарної площадки dS . Саме напрямок цієї нормалі визначає напрямок вектора $\vec{S}$.

2 ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ АБСТРАКЦІЇ І ВИЗНАЧЕННЯ МЕХАНІКИ

Традиційно у вищій школі у загальному курсі фізики вивчають такі розділи: механіка, молекулярна фізика і термодинаміка, електромагнетизм, оптика, квантова і ядерна фізика, фізика твердого тіла.

Механіка – це розділ фізики, який вивчає закономірності механічного руху і взаємодії тіл. **Механічним рухом** називається зміна положення фізичних тіл у просторі з часом.

Основним завданням механіки є визначення положення тіла в просторі в будь-який момент часу.

Розрізняють класичну, релятивістську і квантову механіку. У даному курсі ми будемо вивчати основні закони класичної (ньютонівської) механіки та основи релятивістської механіки – спеціальну і загальну теорії відносності. Основними складовими механіки є кінематика, статика і динаміка.

Дамо визначення основним поняттям механіки.

Система відліку - система координат, жорстко пов'язана з тілом відліку і спосіб вимірювання часу (годинник). Систем відліку існує нескінченна кількість. Вибір відповідної системи відліку обумовлений зручністю і простотою розв’язання фізичної задачі. Розрізняють **інерціальні** та **неінерціальні системи відліку.** Визначення таких систем пов’язане з законами Ньютона, а саме з першим законом Ньютона, про який піде мова в розділі 4.

Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого в даній задачі можна знехтувати, тобто розміри тіла є малими в порівнянні з відстанями при його русі.

Абсолютно тверде тіло - тіло, взаємне розміщення частин якого під час руху залишається незмінним.

Суцільне середовище - сукупність частинок, розміщених на нескінченно малих відстанях одна від одної і пов'язаних пружними силами притягання і відштовхування.

Рух будь-якого тіла розглядається **відносно** певної вибраної системи відліку. Це означає, що цей рух є відносним, тобто тіло нерухоме в одній системі відліку може рухаєтися в іншій із сталою швидкістю і мати прискорення в третій системі відліку.

Розрізняють **поступальний рух** (усі точки тіла рухаються однаково); **обертальний** (точки тіла рухаються за колами, крім тих, що лежать на осі обертання); **коливальний** (зворотно-поступальний або зворотно-обертальний). Поступальний рух вивчається як рух матеріальної точки, тому що всі точки тіла в цьому випадку рухаються за паралельними траєкторіями. Це означає, що для вивчення законів такого руху потрібно знати закон руху тільки однієї точки (наприклад, центра мас) – всі інші рухаються так само.

Зрозуміло, що такий поділ руху на види є певною абстракцією, спробою (і досить вдалою) розкласти реальний рух на прості складові частини. Це дозволяє, визначивши закони різних видів руху, застосовувати ці закони до більш складних рухів.

2.1 ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Лінія, вздовж якої рухається тіло у просторі, називається **траєкторією**. Для математичного опису руху застосовують поняття **радіуса – вектора, шляху, переміщення, швидкості та прискорення.**

Радіусом – вектором матеріальної точки (рис.2.1) називається вектор, який з'єднує точку відліку з матеріальною точкою у даній системі відліку.

Радіус – вектор можна виразити через його проекції на координатні осі і орти цих осей:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \,. \qquad (2.1)$$

Шлях (l, S) – це довжина траєкторії тіла (рис.2.1).

Переміщенням називається вектор, який з'єднує початкове і кінцеве положення тіла ($\Delta\vec{r}$). Одиницею вимірювання шляху і переміщення є метр $[S]$ = 1м.

За визначенням **швидкість** ($\vec{v}$) – це фізична величина, що показує, яке переміщення здійснює матеріальна точка за одиницю часу:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2.2}$$

Використовуючи вираз 2.1 можна виразити швидкість матеріальної точки через її проекції на координатні осі і орти цих осей:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z, \tag{2.3}$$

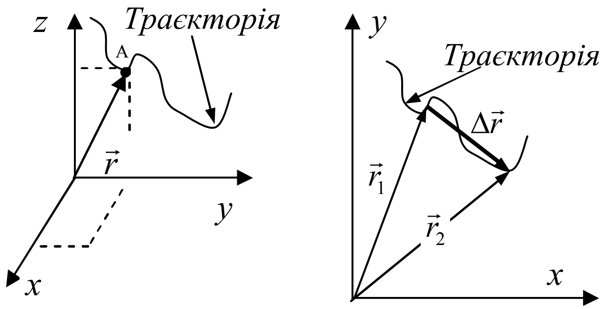


Рисунок 2.1 - Радіус – вектор $\vec{r}$ точки A та переміщення точки $\Delta\vec{r}$

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z. \tag{2.4}$$

Швидкість у даний момент часу називають **миттєвою швидкістю**. У випадку, коли матеріальна точка рухається із сталою швидкістю ($\vec{v} = const$), її можна визначити за формулою

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \qquad (2.5)$$

Одиницею вимірювання швидкості є $[v] = 1 \,^{м}\!/_{с}$. $1 \,^{м}\!/_{с}$ - це така швидкість, рухаючись із якою тіло за 1 секунду проходить шлях 1м.

За видом траєкторії розрізняють **прямолінійний і криволінійний рухи.**

Прискорення – це фізична величина, що показує, з якою швидкістю змінюється швидкість руху матеріальної точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (2.6)$$

Прискорення також можна виразити через його проекції на координатні осі і орти цих осей, якщо взяти похідну за часом від співвідношення 2.4:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{d\vec{v}_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{d\vec{v}_z}{dt}\vec{e}_z = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z. \qquad (2.7)$$

Одиницею вимірювання прискорення є $[\vec{a}] = 1\frac{м}{с^2}$. $1\frac{м}{с^2}$; це таке прискорення, при якому тіло за 1 секунду змінює швидкість на $1 \,^{м}\!/_{с}$.

Закон незалежності рухів: якщо матеріальна точка бере участь у декількох рухах, то її переміщення дорівнює векторній сумі переміщень, а швидкість - векторній сумі швидкостей у кожному з рухів.

3 ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ

Предметом вивчення кінематики ***є*** опис механічних рухів тіл без розгляду причин зміни виду руху.

3.1 КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

3.1.1 ПОСТУПАЛЬНИЙ ПРЯМОЛІНІЙНИЙ РУХ

За формою траєкторії розрізняють п**рямолінійний** та **криволінійний** поступальні рухи. **Рівномірним прямолінійним** ***рухом є*** рух, при якому матеріальна точка рухається по прямій лінії і за будь-які рівні проміжки часу здійснює однакові переміщення.

Нерівномірний рух - це рух, під час якого швидкість точки змінюється з часом за величиною і (або) за напрямком.

Для характеристики нерівномірного руху вводять поняття **середньої швидкості руху** та **середнього прискорення.** Розрізняють середню скалярну та векторну швидкості руху.

- ***Скалярна середня швидкість руху*** **-** це фізична величина, що дорівнює відношенню шляху до проміжку часу, за який матеріальна точка пройшла цей шлях:

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \frac{S}{\Delta t}. \tag{3.1}$$

- ***Векторна середня швидкість руху*** - це фізична величина, що дорівнює відношенню переміщення точки до проміжку часу, протягом якого точка виконала це переміщення:

$$\langle \vec{\mathrm{v}} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \tag{3.2}$$

Середнє прискорення – це фізична величина, що дорівнює відношенню різниці векторів кінцевої і початкової швидкостей до проміжку часу зміни швидкості:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \tag{3.3}$$

Рівноприскорений рух - це рух із сталим за модулем прискоренням $\vec{a} = const$.

У випадку рівноприскореного руху вираз для прискорення набирає вигляду

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t}, \tag{3.4}$$

де $\vec{v}_0$ – початкова швидкість тіла (при $t = 0$); $\vec{v}$ – його швидкість в момент часу t. Знайдемо швидкість та переміщення при рівноприскореному русі:

$$\vec{v} = \int \vec{a}\, dt = at + C$$

при $t = 0, \vec{v} = \vec{v}_0$,

тоді

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \tag{3.5}$$

Переміщення

$$\vec{S} = \int_0^S d\vec{r} = \int_0^t \vec{v} dt = \int_0^t \vec{v}_0 dt + \int_0^t \vec{a} t dt,$$

тоді

$$\vec{S} = \vec{\text{v}}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}. \tag{3.6}$$

3.1.2 ПОСТУПАЛЬНИЙ КРИВОЛІНІЙНИЙ ТА ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ

У випадку, коли траєкторія руху тіла є кривою лінією, рух називається **криволінійним** (рис.3.1).

Зручним для вирішення практичних завдань з вивчення криволінійного руху є розкладання вектора прискорення на два

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$d\vec{r}$

Рисунок 3.3 – До виведення зв'язку між лінійною і кутовою швидкіс

$d\varphi$

$Rd\varphi$

$\vec{r}$

$\vec{\text{v}}$

Рисунок 3.2 – Нормальне і тангенціальне прискорення точки

компоненти: ***тангенціальне*** $\vec{a}_\tau$ (***дотичне*** до траєкторії) і ***нормальне*** $\vec{a}_n$ (***доцентрове***) прискорення (рис. 3.2):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \tag{3.7}$$

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\text{v}}{dt}\vec{\tau}, \qquad \vec{a}_n = \frac{\text{v}^2}{R}\vec{n}, \tag{3.8}$$

де $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ орти спрямовані відповідно вздовж і перпендикулярно до вектора швидкості.

Тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau$ змінює тільки величину швидкості, а **нормальне** $\vec{a}_n$ - тільки її напрямок.

Миттєвий радіус кривизни траєкторії визначається радіусом кола, вписаного в ділянку траєкторії у даний момент часу.

Рух по колу є найпростішим криволінійним рухом. Для його характеристики використовують такі характеристики: **кутове переміщення, кутову швидкість, кутове прискорення, частоту і період обертання.** Потрібно відзначити, що ці поняття є застосовними і для обертального руху.

Обертальним рухом називається рух, при якому всі точки тіла рухаються по концентричним колам. Геометричне місце точок, які є центрами цих окружностей називається **віссю обертання** твердого тіла.

Кутовим переміщенням $\vec{\varphi}$ називають псевдовектор, модуль якого дорівнює куту, на який повернувся радіус - вектор точки $\vec{r}$ за проміжок часу $\Delta\vec{t}$. Напрямок кутового переміщення визначається за допомогою **правила правого гвинта**: з кінця вектора $d\varphi$ поворот тіла має відбуватися проти ходу годинникової стрілки.

Одиницею вимірювання кутового переміщення є радіан: $|\varphi| = 1\,рад$. Між лінійним і кутовим переміщеннями існує зв'язок

$$\Delta\vec{r} = \left[\vec{\varphi} \times \vec{r}\right], \tag{3.9}$$

тобто лінійне переміщення дорівнює векторному добутку кутового переміщення на радіус-вектора матеріальної точки.

Кутова швидкість $(\vec{\omega})$ показує, як змінюється кут повороту точки за одиницю часу:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (3.10)$$

У випадку руху тіла із сталою кутовою швидкістю

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Одиницею вимірювання кутової швидкості є радіан за секунду: $[\omega] = 1\frac{рад}{с}$.

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$d\vec{r}$

Рисунок 3.3 – До виведення зв'язку між лінійною і кутовою швидкістю

Знайдемо зв'язок між лінійною ($\vec{v}$) і кутовою ($\vec{\omega}$) швидкостями. Для нескінченно малих переміщень $d\vec{r}$ збігається з шляхом (рис.3.3), тоді

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{[d\vec{\varphi}\,\vec{r}]}{dt} = [\vec{\omega}\,\vec{r}].$$

Таким чином, лінійна швидкість дорівнює векторному добутку кутової швидкості на радіус-вектор:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \qquad (3.11)$$

$d\varphi$

R

$\vec{r}$

$\vec{v}$

Кутова швидкість також є псевдовектором і визначається за правилом правого гвинта (свердлика).

Рисунок 3.2 – Нормальне і

Кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ **показує**, як змінюється кутова швидкість з часом і дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній за часом від кутового переміщення:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \tag{3.12}$$

Одиницею вимірювання кутового прискорення є радіан за секунду в квадраті: $[\varepsilon] = 1\frac{рад}{с^2}$. Напрямок кутового прискорення є паралельним до осі обертання і збігається із напрямком зміни кутової швидкості.

Отримаємо зв'язок між лінійним ($\vec{a}$) і кутовим ($\vec{\varepsilon}$) прискореннями. Підставимо у вираз (2.6) співвідношення (3.11), тоді

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}\times\vec{r}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right].$$

Легко побачити, що другий складник є нормальним прискоренням, враховуючи, що $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\mathrm{v}}$, а $\vec{\mathrm{v}} = [\vec{\omega}\times\vec{r}]$

$$\left[\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]] = \omega^2 r\vec{n} = \vec{a}_n.$$

Тоді перший складник згідно з рівнянням 3.7 є тангенціальним прискоренням, тобто **лінійне (тангенціальне) прискорення** дорівнює векторному добутку кутового прискорення і радіуса-вектора матеріальної точки:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\times\vec{r}], \tag{3.13}$$

Нормальне прискорення дорівнює добутку квадрата кутової швидкості ω, модуля радіуса-вектора r та одиничного вектора нормалі $\vec{n}$ до переміщення, спрямованого до центра кривизни траєкторії:

$$\vec{a}_n = \omega^2 r \vec{n} . \qquad (3.14)$$

Рівномірний рух по колу – це найбільш простий вид криволінійного руху. Час, протягом якого матеріальна точка здійснює один оберт, називається **періодом обертання:**

$$T = \frac{t}{N}, \qquad (3.15)$$

де N - число повних обертів; t - час, за який ці оберти здійснюються. У випадку рівномірного руху по колу кутова швидкість дорівнює

$$\omega = 2\pi / T . \qquad (3.16)$$

Число повних обертів за одиницю часу називається **частотою** обертання:

$$\nu = \frac{N}{t} . \qquad (3.17)$$

Таким чином, період і частота – взаємно обернені величини:

$$T = 1/\nu \quad \text{і} \quad \nu = 1/T . \qquad (3.18)$$

Кутова швидкість пов'язана з частотою співвідношенням

$$\omega = 2\pi\nu . \qquad (3.19)$$

Одиницями вимірювання періоду є $\left[T\right]=1\,c$, а частоти $\left[\nu\right]=1\,c^{-1}=1\,Гц$.

Лінійна швидкість рівномірного руху точки по колу

$$v = \Delta S / \Delta t ,$$

тоді

$$v = 2\pi R / T , \qquad (3.20)$$

де R - радіус кола.

При рівноприскореному обертальному русі - кутове прискорення стале $\vec{\varepsilon} = const$. Тоді

$$\omega = \int_0^t \varepsilon dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \Rightarrow \omega = \omega_0 + \varepsilon t ,$$

$$\varphi = \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \varepsilon t dt \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \frac{\varepsilon t^2}{2} .$$

Зверніть увагу, що отримані співвідношення для рівнозмінного обертального руху подібні до аналогічного прямолінійного руху (див. (3.7) та (3.8)).

При рівномірному обертальному русі точки по колу її швидкість не змінюється за модулем $\vec{a}_\tau = 0$, але змінюється за напрямком, $\vec{a} = \vec{a}_n \neq 0$.

4 ОСНОВИ ДИНАМІКИ

4.1 ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

Поступальним називається такий рух, під час якого будь-яка пряма, жорстко пов'язана з тілом, залишається паралельною самій собі.

Швидкості і прискорення усіх точок тіла під час такого руху однакові, траєкторії ідентичні і їх можна поєднати за допомогою паралельного переносу.

З цього випливає, що для опису поступального руху твердого тіла досить знати як рухається одна з його точок. Всі інші точки рухаються так само.

В основу динаміки Ньютона покладено теорію руху матеріальної точки, яка ґрунтується на трьох законах (постулатах) Ньютона, встановлених шляхом аналізу дослідних даних.

4.1.1 ПЕРШИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

І закон Ньютона (1687 р.) (закон інерції) ґрунтується на принципі відносності Галілея, встановленому у 1636р.

Інерція - явище збереження тілом вектора швидкості в умовах вільного руху. **Вільний рух** тіла – це рух за умови відсутності дії на нього з боку інших тіл (або взаємної компенсації їх дій).

Принцип відносності Галілея: усі механічні явища проходять однаково у всіх інерціальних системах відліку.

І закон Ньютона: існують такі системи відліку, у яких тіло перебуває у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно, коли на нього не діють інші тіла чи їх дії скомпенсовані:

$$\vec{F} = 0, \Rightarrow \vec{v} = const\,. \qquad (4.1)$$

І закон Ньютона називають **законом інерції**, оскільки він встановлює існування саме інерціальних систем відліку. Системи відліку, у яких вільне тіло перебуває у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно, називають **інерціальними системами відліку**.

4.1.2 ДРУГИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Маса і сила – це первинні поняття динаміки, які не мають формальних визначень. В інерціальній системі відліку змінити стан руху тіла можна тільки за допомогою дії на нього інших тіл. При вивченні змін руху тіла зручно зображувати дію на нього інших тіл **векторами - силами**. Кількісною характеристикою ступеня впливу одних тіл на інші є **сила** ($\vec{F}$)**. Сила** $\vec{F}$ **- векторна величина**. Це означає, що, крім модуля, сила має як точку прикладення, так і напрямок. Якщо на тіло діє кілька сил, то таку систему сил можна замінити **еквівалентною системою**. У випадку, коли сили діють уздовж прямих, які перетинаються в одній точці, їх дію можна замінити рівнодійною силою. **Рівнодійна сила** дорівнює векторній сумі сил. Отримати рівнодійну силу можна, виконуючи додавання сил за **правилом додавання векторів** (трикутника або паралелограма).

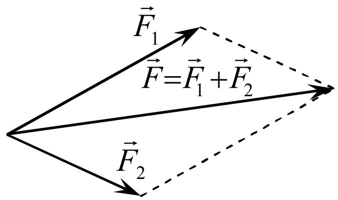


Рисунок 4.1 - Правило додавання векторів – правило паралелограма

Принцип незалежності дії сил: кожна діюча сила надає тілу прискорення, величина якого не залежить ні від стану руху тіла, ні від дії на тіло інших сил.

Виявляється, що під дією тієї самої сили різні тіла по-різному змінюють свою швидкість. Отже, прискорення, отримане тілом, залежить не тільки від сили, але і від властивостей самого тіла. Властивість тіл зберігати свій стан руху називається **інертністю**. Кількісною мірою інертності є

маса тіла (m). У Міжнародній системі одиниць СІ одиницею вимірювання маси є кілограм: [m] = 1 кг.

Другий закон Ньютона (закон руху) – основний закон механіки поступального руху. Він встановлює кількісний зв'язок між прискоренням тіла в інерціальній системі відліку і силами, які викликали це прискорення. В **інтегральній формі другий закон Ньютона** формулюється так: прискорення прямо пропорційне рівнодійній всіх діючих на тіло сил і обернено пропорційне масі самого тіла:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{4.2}$$

З (4.2) можна визначити одиницю вимірювання сили - $\left[\vec{F}\right] = кг \cdot {м}/{с^2} = 1Н$ – один Ньютон.

Для характеристики стану руху тіла вводиться ще одна фізична величина – **імпульс тіла** ($\vec{p}$):

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{4.3}$$

Зміна імпульсу характеризує дію сили протягом певного часу.

Другий закон Ньютона в диференціальній формі: в інерціальних системах відліку швидкість зміни імпульсу матеріальної точки дорівнює рівнодійній всіх сил, прикладених до точки, і спрямована в той самий бік:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{4.4}$$

У такому вигляді другий закон Ньютона був сформульований самим Ньютоном, і саме в такій формі його можна використовувати для випадку руху тіл із змінними масами (наприклад для руху ракет). Він виявляється справедливим також під час руху тіл з великими швидкостями, коли починає виявлятися залежність маси тіла від його швидкості (у релятивістській механіці).

З другого закону Ньютона в диференціальній формі легко отримати його інтегральну форму. У випадку сталої маси $(m = const)$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} .$$

Границі застосовності другого закону Ньютона

Другий закон Ньютона є справедливим тільки в інерціальних системах відліку. Оскільки система відліку пов'язана із Землею є неінерціальною внаслідок її добового обертання навколо власної осі та обертання навколо Сонця, то закони Ньютона на нашій сферичній обертовій Землі виконуються тільки наближено.

З іншого боку, виявляється, що II закон Ньютона у вигляді $\vec{F} = m\vec{a}$ навіть у інерціальних системах відліку має наближений характер, оскільки, як було встановлено в спеціальній теорії відносності (розділ 9), під час руху з швидкостями, близькими до швидкості світла, маса тіла залежить від його швидкості. Відхилення від законів класичної механіки Ньютона спостерігається також у мікросвіті, де уявлення та закони класичної механіки втрачають зміст і в дію вступають закони квантової механіки.

4.1.3 ТРЕТІЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Взаємодія тіл визначає величину сили, що діє на тіло. **Третій закон Ньютона (закон взаємодії)** кількісно характеризує цю взаємодію. **Будь-які два тіла, що взаємодіють, діють одне на одне з рівними за модулем та протилежно спрямованими силами:**

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}\,. \tag{4.5}$$

Обидві сили діють вздовж лінії, що сполучає ці тіла. Потрібно відзначити, що сили в третьому законі Ньютона прикладені до різних тіл. Сили, що фігурують у третьому законі Ньютона завжди мають однакову природу, виникають парами і направлені вздовж однієї прямої.

4.2 СИЛИ В МЕХАНІЦІ

4.2.1 ГРАВІТАЦІЯ. ЗАКОН ВСЕСВІТНЬОГО ТЯЖІННЯ

Гравітація – це універсальна взаємодія між будь-якими видами матерії.

Класичну нерелятивістську теорію гравітації створив Ньютон. Він відкрив закон всесвітнього тяжіння. Гравітаційна взаємодія здійснюється через гравітаційне поле. Ньютон встановив, що маса є не тільки мірою інертності, але і мірою гравітації, тобто маса створює гравітаційне поле.

Закон всесвітнього тяжіння: два точкових тіла притягуються одне до одного із силами, прямо пропорційними добутку мас тіл і обернено пропорційними квадрату відстані між ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,. \tag{4.6}$$

Коефіцієнт пропорційності G називається гравітаційною сталою, це одна з основних фізичних констант. Гравітаційна стала характеризує інтенсивність гравітаційної взаємодії. У системі СІ $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, Н \cdot м^2/кг^2$. Сили притягання називаються **гравітаційними силами**. Гравітаційні сили є **центральними**, тобто вони завжди спрямовані уздовж прямої, що з'єднує точкові тіла. Гравітаційне поле, створене гравітаційними силами, є **потенціальним**. Це означає, що робота таких сил по замкнутому контуру дорівнює нулю.

Одним із проявів закону всесвітнього тяжіння є **сила тяжіння**. **Сила тяжіння** – це сила гравітаційного притягання тіл до Землі. Згідно з законом всесвітнього тяжіння вона дорівнює

$$F_T = G\frac{mM}{R^2}, \tag{4.7}$$

де M – маса землі; R – її радіус. Якщо тіло рухається тільки під дією сили тяжіння F_T, тобто вільно падає, його прискорення $a = g$. С**ила тяжіння** відповідно до другого закону Ньютона дорівнює

$$F_T = mg. \tag{4.8}$$

Отже, **прискорення вільного падіння** на поверхні Землі

$$g = G\frac{M}{R^2}. \tag{4.9}$$

Слід зазначити, що внаслідок обертання Землі навколо осі система відліку, пов'язана з нею, не є інерціальною, тому вираз (4.9) є наближеним. Внаслідок неінерціальності та не сферичності Землі значення g залежить від широти місцевості і є константою для даної точки земної поверхні. Як правило, при розрахунках вважають, що $g \approx 9{,}81\frac{м}{с^2}$. При підніманні тіла над Землею прискорення вільного падіння зменшується і на висоті h складає

$$g_h = g\frac{R^2}{(R+h)^2}, \tag{4.10}$$

де g - прискорення вільного падіння на поверхні Землі.

Потрібно відрізняти силу тяжіння і вагу тіла. **Вага тіла** $\vec{P}$ – це сила, з якою тіло діє на горизонтальну опору або розтягує підвіс. Вага тіла також спричиняється гравітаційними силами. Математично вага тіла дорівнює силі тяжіння в інерціальній системі відліку $\vec{a} = 0$:

$$\vec{P} = m\vec{g}\,.$$

У випадку руху тіла з прискоренням $\vec{a} \neq 0$ **вага тіла** визначається співвідношенням

$$\vec{P} = m\left(\vec{g} - \vec{a}\right), \qquad (4.11)$$

де $\vec{a}$ - прискорення системи відліку. Така залежність ваги тіла від прискорення системи пояснюється дією сил інерції (див. розділ 6).

Космічні швидкості

Перша космічна швидкість – це швидкість, яку потрібно надати тілу, щоб воно стало супутником Землі, тобто рухалось по коловій орбіті навколо Землі.

Візьмемо радіус орбіти, який дорівнює радіусу Землі, тоді

$$m\frac{v_I^2}{R} = mg\,.$$

Звідки

$$v_I = \sqrt{Rg} \approx 8\,{}^{км}\!/_{c}\,. \qquad (4.12)$$

Друга космічна швидкість – це швидкість, яку потрібно надати тілу під час запуску, щоб воно вийшло із сфери земного притягання. Для знаходження цієї швидкості використаємо закон збереження енергії.

На поверхні Землі повна енергія тіла дорівнює

$$W = \frac{m v_{II}^2}{2} - G\frac{Mm}{R}.$$

При віддаленні тіла на нескінченність повна енергія стає такою, що дорівнює нулю, тоді

$$\frac{m v_{II}^2}{2} = G\frac{Mm}{R},$$

звідки

$$v_{II} = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{2gR} \approx 11 \,{}^{км}\!/\!_{с}. \tag{4.13}$$

Третя космічна швидкість – це швидкість, яку потрібно надати тілу, щоб воно вийшло за межі Сонячної системи:

$$v_{III} = \sqrt{2G\frac{M_C}{R_{ЗО}}} \approx 42 \,{}^{км}\!/\!_{с}, \tag{4.14}$$

де M_C - маса Сонця; $R_{ЗО}$ - радіус Земної орбіти.

Четверта космічна швидкість – це швидкість, яку потрібно надати тілу, щоб воно вийшло за межі Галактики.

Швидкість Сонця навколо центра Галактики не може бути більшою ніж 285 км/с, інакше Галактика розпалася б. Тобто четверта космічна швидкість дорівнює

$$v_{IV} > 285 \,{}^{км}\!/\!_{с}.$$

4.2.2 ПРУЖНІ СИЛИ

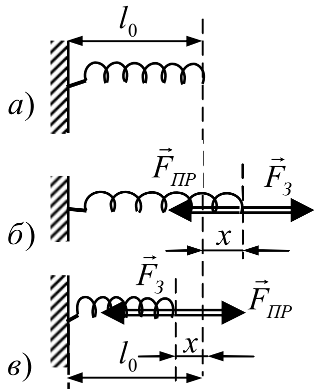


Рисунок 4.2 - Виникнення сили пружності $\vec{F}_{ПР}$ при деформації пружини: *а*) пружина недеформована; *б*) пружину розтягують із силою $\vec{F}_З$; *в*) пружину стискають із силою $\vec{F}_З$

Під впливом зовнішніх сил виникають **деформації**, тобто зміни розмірів і форми тіл. **Деформація називається пружною,** коли після припинення дії зовнішніх сил відновлюються форма і розміри тіла. Деформація має пружний характер за умови, що зовнішня сила не перевищує певного значення – **межі пружності.** Коли межа пружності перевищена, деформація стає пластичною. У цьому випадку початкова форма і розміри тіла відновлюються не повністю.

Візьмемо пружину, яка у недеформованому стані, має довжину l_0 (рис. 4.2). Прикладемо до її кінця силу $\vec{F}_З$, яка у випадку *б*) розтягує пружину, а у випадку *в*) - стискає. У стані рівноваги зовнішня сила $\vec{F}_З$ буде компенсована пружною силою $\vec{F}_{ПР}$. Таким чином, у деформованому тілі виникають пружні сили, які зрівноважують зовнішні сили, що викликають деформацію.

Гук експериментально встановив, що при пружній деформації подовження тіла (пружини) пропорційне зовнішній силі (**закон Гука**):

$$x = \frac{1}{k} F_З , \qquad (4.15)$$

де k - жорсткість пружини. Чим більшою є жорсткість пружини, тим менше вона розтягується під дією даної сили. Жорсткість пружини залежить від матеріалу, розмірів витка і довжини пружини.

Сила пружності відрізняється від зовнішньої тільки знаком, тобто

$$F_{ПР} = -kx\,. \tag{4.16}$$

Сила пружності виникає у всій пружині. Будь-яка частина пружини діє на іншу частину із силою $\vec{F}_{ПР}$, яка визначається формулою (4.16). Тому якщо розрізати пружину навпіл, то в кожній з половинок пружини буде виникати така сама сила $\vec{F}_{ПР}$, при вдвічі меншому подовженні.

Відзначимо ще раз, що закон Гука виконується тільки для

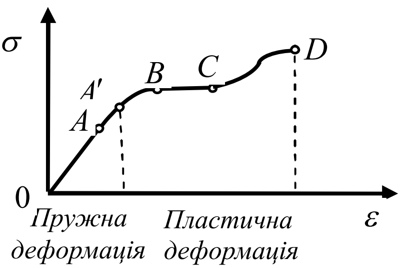


Рисунок 4.3 – Залежність напруги від відносного подовження: A - межа пропорційності; A' - межа пружності; B - межа текучості; D - межа міцності

пружних деформацій (ділянка 0А на рис. 4.3).

Однорідні стрижні під час розтягу і стискання поводять себе аналогічно до пружини. Деформація викликає у стрижні пружні сили. Ці сили характеризують напругою σ. **Напруга** визначається модулем сили, яка діє на одиницю площі:

$$\sigma = \frac{F_{ПР}}{S}\,, \tag{4.17}$$

де S - площа поперечного перерізу стрижня. Сила спрямована перпендикулярно до поперечного перерізу. **Відносним подовженням** називається величина

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \tag{4.18}$$

де $\Delta l = x$ - подовження тіла; l - його довжина в недеформованому стані.

З (4.16) і (4.15) маємо

$$F_{ПР} = \sigma S = k\Delta l,$$

тоді

$$\frac{\sigma S}{l} = \frac{k\Delta l}{l} \quad \text{і} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{S}{lk}\sigma .$$

Множник перед напругою є сталою величиною, яка залежить тільки від матеріалу стрижня.

Тоді **закон Гука для стрижня** набере вигляду

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma, \tag{4.19}$$

де $E = \dfrac{lk}{S}$ - **модуль Юнга**. Модуль Юнга дорівнює такій нормальній напрузі, при якій відносне подовження тіла дорівнює одиниці. Насправді такі пружні деформації неможливі, так, залізні стрижні руйнуються вже при $\sigma = 0{,}002E$.

4.2.3 СИЛИ ТЕРТЯ

Сили тертя супроводжують нас всюди. Вони завжди виникають при контакті тіл, наприклад, при відносному русі дотичних тіл. Розрізняють зовнішнє і внутрішнє тертя. **Зовнішнє тертя** виникає при відносному переміщенні двох дотичних твердих тіл (тертя ковзання), або при спробах викликати таке переміщення (**тертя спокою**). Сила **тертя спокою** (рис.4.4) обумовлена дією опори, на якій лежить тіло і дорівнює зовнішній силі.

Коли модуль зовнішньої сили перевищить деяке значення F_0, тіло почне ковзати по поверхні. Величина F_0 - це максимальне значення сили тертя спокою. Сама сила набирає одне із значень в інтервалі від нуля до F_0 залежно від модуля зовнішньої сили.

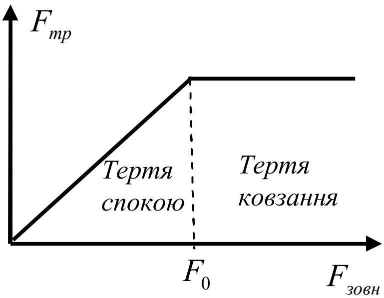


Рисунок 4.4 – Залежність сили тертя від зовнішньої сили

Максимальна сила тертя спокою спрямована по дотичній до поверхонь і прямо пропорційна нормальній складовій рівнодійної сил, які діють на поверхню дотичних тіл. Відзначимо, що ця сила дорівнює силі тертя ковзання.

Сила тертя ковзання перешкоджає відносному руху тіл і спрямована вздовж поверхні їх контакту. Дослідним шляхом встановлено, що сила тертя ковзання дорівнює

$$F_{тр} = \mu N, \qquad (4.20)$$

де μ - коефіцієнт тертя ковзання, який є функцією швидкості; N - сила нормального тиску.

Крім вищезазначених видів зовнішнього тертя, розрізняють тертя крутіння та кочення. **Тертя крутіння** є різновидом тертя ковзання. Воно спостерігається, коли два дотичних тіла обертаються один відносно одного.

Тертя кочення виникає, коли одне тіло котиться по поверхні іншого. Значення цієї сили встановлює **закон Кулона**

$$F_{коч} = \mu_{коч} \frac{N}{r}, \tag{4.21}$$

де $\mu_{коч}$ - коефіцієнт тертя кочення; N - нормальна складова сили тиску в точках дотику поверхонь; r - радіус тіла, яке котиться.

Внутрішнє тертя виникає при відносному переміщенні частин суцільного тіла (наприклад, рідини або газу). Внутрішнє тертя в рідині ми розглянемо пізніше у розділі 8.

4.3 ІМПУЛЬС. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ

Закон збереження імпульсу належить до найфундаментальніших законів природи, він випливає з факту однорідності простору.

Отримати закон збереження імпульсу можна з II і III законів Ньютона. Для його виведення потрібно ввести поняття системи та замкнутої системи.

Системою називається сукупність тіл, об'єднаних певними зв'язками. **Замкнутою (ізольованою) системою** називається система, яка не обмінюється з навколишнім середовищем ні енергією, ні речовиною, ні інформацією. Закони збереження є справедливими тільки для замкнутих систем.

Нехай система складається з двох тіл. Тоді з другого закону Ньютона маємо, що сила, яка діє з боку першого тіла на друге, і сила, яка діє з боку другого тіла на перше, відповідно дорівнюють

$$\vec{F}_{1,2}=\frac{d\vec{p}_2}{dt}=\frac{d\left(m_2\vec{v}_2\right)}{dt},\qquad \vec{F}_{2,1}=\frac{d\vec{p}_1}{dt}=\frac{d\left(m_1\vec{v}_1\right)}{dt}.$$

З третього закону Ньютона випливає, що

$$\vec{F}_{1,2}=-\vec{F}_{2,1}.$$

Час взаємодії для обох тіл однаковий, отже

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt}=-\frac{d\vec{p}_1}{dt}\Rightarrow \quad d\vec{p}_2=-d\vec{p}_1\Rightarrow \quad d\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2\right)=0,$$

тоді

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=const.$$

З одержаного виразу можна зробити висновок, що при взаємодії двох тіл векторна сума їх імпульсів не змінюється (зберігається). Узагальнивши цей висновок для ізольованої системи, яка складається з N тіл, отримаємо **закон збереження імпульсу: імпульс замкнутої системи тіл зберігається:**

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i=const. \tag{4.22}$$

Відповідно не змінюються і проекції імпульсу замкнутої системи на осі декартових координат інерціальної системи відліку:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(p_i\right)_x=const,\ \sum_{i=1}^{N}\left(p_i\right)_y=const,\quad \sum_{i=1}^{N}\left(p_i\right)_z=const.$$

Сумарний імпульс системи, що рухається, дорівнює

$$\vec{p} = m\vec{v}_C, \tag{4.23}$$

де m - маса усієї системи, а $\vec{v}_C$ - швидкість її центра мас.

Центр мас – це точка перетину прямих, уздовж яких мають бути спрямовані сили, що викликають тільки поступальний рух тіла. У випадку однорідного гравітаційного поля $\left(\vec{F}_{гр} = const\right)$, наприклад, в полі сили тяжіння $\left(m\vec{g} = const\right)$, всі сили прикладені до тіла є паралельними. Точка, відносно якої сумарний момент сил тяжіння дорівнює нулю, називається **центром тяжіння тіла**. Можна довести, що в однорідному гравітаційному полі центр тяжіння збігається з центром мас.

Точка C, положення якої визначається радіусом-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i, \tag{4.24}$$

називається **центром мас** системи матеріальних точок. У наведеній формулі $m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N$ - маса такої системи. Тоді координати центра мас визначаються за формулами:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_ix_i,$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_Ny_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_iy_i$$

та

$$z_C = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots + m_Nz_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_iz_i.$$

Центр мас системи матеріальних точок під дією зовнішніх сил рухається так само, як матеріальна точка сумарної маси.

Із закону збереження імпульсу випливає, що

за будь-яких процесів, що відбуваються в замкнутій системі, швидкість її центра мас не змінюється:

$$\vec{v}_C = const\,. \qquad (4.25)$$

Ми отримали закон збереження імпульсу із законів Ньютона. Але на відміну від законів Ньютона, закон збереження імпульсу є справедливим не тільки для класичної механіки. Як свідчать дослідження, закон збереження імпульсу виконується в макро- і в мікросвітах, хоча в мікросвіті поведінка частинок описується квантовою механікою. Виконується цей закон і в мегасвіті, де керують закони релятивістської механіки та загальної теорії відносності.

Таким чином, закон збереження імпульсу належить до найфундаментальніших законів природи. Потрібно відзначити, що закон збереження імпульсу пов’язаний з властивостями простору-часу. Беззаперечне виконання закону збереження імпульсу є наслідком однорідності простору, тобто однаковості законів природи щодо паралельного переносу.

Закон збереження імпульсу дозволяє легко пояснити **принцип реактивного руху**. При згорянні палива в камері згоряння ракети підвищується температура газу і створюється високий тиск, завдяки чому продукти згоряння з великою швидкістю вириваються із сопла двигуна. За умови відсутності зовнішніх полів повний імпульс ракети і газів, що вилітають із сопла, залишається незмінним. Тому після викиду газів ракета отримує імпульс, а отже, і швидкість протилежного напрямку.

4.4 РОБОТА І МЕХАНІЧНА ЕНЕРГІЯ

Зміна імпульсу характеризує дію сили у часі. Механічна робота характеризує дію сили у просторі. **Роботою** dA сили $\vec{F}$

при переміщенні тіла, до якого вона прикладена, називається скалярний добуток сили $\vec{F}$ на елементарне переміщення $d\vec{r}$ точки її прикладення:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = Fdr\cos\alpha\,, \tag{4.26}$$

де α - кут між напрямком сили $\vec{F}$ і переміщенням $d\vec{r}$. (Скалярний добуток двох векторів).

Визначимо **одиницю вимірювання** роботи:

$$[A]=[F]\cdot[\Delta S] \quad \Rightarrow \quad [A]=1H\cdot м=1Дж\,.$$

1 Джоуль – це робота сили величиною 1Н по переміщенню тіла в напрямку дії сили на 1м.

В інтегральній формі вираз для роботи має вигляд

$$A=\int \vec{F}d\vec{r}\,. \tag{4.27}$$

Згідно з другим законом Ньютона

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}\,,$$

тоді

$$dA=m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r}\,.$$

Враховуючи, що $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, отримаємо

$$dA = md(\vec{v})\cdot\vec{v} = m\vec{v}d(\vec{v}) = md\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

або

$$dA = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Тоді

$$\Delta A = \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Величину

$$W_K = \frac{mv^2}{2} \text{ або } W_K = \frac{p^2}{2m} \qquad (4.28)$$

називають **кінетичною енергією**, вона є енергією руху тіла. Таким чином, **робота є мірою зміни кінетичної енергії:**

$$\Delta A = \Delta W_K\,. \qquad (4.29)$$

Потужністю (N) називається величина, що характеризує швидкість виконання роботи:

$$N = \frac{dA}{dt}\,. \qquad (4.30)$$

З урахуванням того, що $dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$, одержимо

$$N = \vec{F}\,\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{\mathrm{v}}\ . \qquad (4.31)$$

Це потужність у даний момент часу (**миттєва потужність**). Визначимо одиницю вимірювання потужності:

$$[N] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{Дж}{с} = Вт\ .$$

1 Ват – це така потужність, коли за 1с виконується робота 1 *Дж*.

4.4.1 КОНСЕРВАТИВНІ І ДИСИПАТИВНІ СИЛИ

Відомо, що взаємодія між тілами відбувається не тільки при їх зіткненні, але й на відстані. Наприклад, взаємодія між Сонцем і Землею, Землею і піднятими над її поверхнею тілами і т.п.

Такі взаємодії здійснюються за допомогою **фізичних полів**, які є однією з фундаментальних форм матерії. Кожне тіло створює в оточуючому просторі особливий змінний стан, який називають силовим полем. Це поле проявляє себе через дію сил на інші тіла.

Усі сили, що діють на тіла, можна розділити на два класи: консервативні і дисипативні. **Консервативними** називаються сили, робота яких не залежить від шляху, по якому рухалося тіло. Робота таких сил залежить тільки від початкового і кінцевого положення тіла. Легко довести, що робота консервативних сил за замкнутим контуром дорівнює нулю:

$$A_O = \oint \vec{F}d\vec{r} = 0\ . \qquad (4.32)$$

До консервативних сил належать: сили тяжіння, пружні сили, кулонівські сили.

Коли сили, які діють на частинку, у всіх точках поля однакові за модулем і напрямком, поле називають **однорідним**. За умови, що однорідне поле не змінюється з часом, його називають **стаціонарним.**

Сили, що діють на частинку в однорідному стаціонарному полі, є консервативними.

Прикладом однорідного стаціонарного поля є поле сили тяжіння $\vec{F} = m\vec{g}$ в обмеженій області поблизу поверхні Землі.

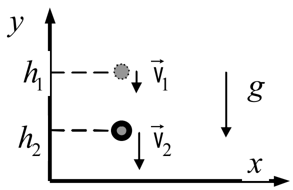


Рисунок 4.5 – Переміщення тіла в полі сили тяжіння

Робота **дисипативних (неконсервативних) сил** за замкнутим контуром не дорівнює нулю. Вона залежить від форми шляху. Такими є сили тертя, в'язкості, опору.

4.4.2 ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ

Розглянемо поле сили тяжіння, яке є консервативним. Робота з переміщення тіла з однієї точки в іншу не залежить від форми траєкторії, а визначається різницею висот h_1 і h_2 в початковому і кінцевому положеннях тіла. Доведемо це. Дійсно, $v_2^2 - v_1^2 = -2g(h_2 - h_1)$ (знак „-” показує, що прискорення вільного падіння g спрямоване в бік протилежний осі y (рис.4.5)), тоді

$$\frac{v_2^{\;2}}{2} - \frac{v_1^{\;2}}{2} = g(h_1 - h_2). \tag{4.33}$$

Помноживши ліву і праву частини виразів на m, одержимо

$$\frac{m\mathrm{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2} = mgh_1 - mgh_2 .$$

У цьому співвідношенні ліворуч стоїть різниця кінетичних енергій тіла в початковій і кінцевій точках, отже, праворуч також має бути різниця величин з розмірністю енергії. Це різниця потенціальних енергій тіла в цих самих точках. **Потенціальною** називається енергія, що визначається взаємним розміщенням тіл (Землі і Сонця, електрона і ядра атома, тіла, піднятого над Землею і т. п.) чи частин того самого тіла внаслідок різних видів деформації: розтягу, стиску, зсуву і т. ін. На відміну від кінетичної енергії, яка для матеріальної точки завжди дорівнює $\frac{m\mathrm{v}^2}{2}$, потенціальна енергія залежить від типу діючих сил. Так, наприклад, з виразу (4.33) видно, що **потенціальна енергія тіла, піднятого над землею,** визначається співвідношенням

$$W_p = mgh . \tag{4.34}$$

З (4.33) також випливає, що зміна кінетичної енергії тіла дорівнює зміні потенціальної енергій з протилежним знаком:

$$\Delta W_k = -\Delta W_p . \tag{4.35}$$

Із співвідношення (4.35) можна зробити висновок, що **робота дорівнює зміні потенціальної енергії, узятої з протилежним знаком:**

$$\Delta A = -\Delta W_p . \tag{4.36}$$

Знайдемо потенціальну енергію пружно деформованого тіла. Роботу з розтягу пружини з урахуванням закону Гука (4.14) знайдемо як

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2},$$

Тоді, враховуючи (4.36), отримаємо для **потенціальної енергії пружно деформованої пружини** (або для одновимірної деформації) вираз

$$W_p = \frac{kx^2}{2}. \tag{4.37}$$

Потенціальна енергія визначається з точністю до довільної сталої. Початок відліку потенціальної енергії визначається з міркувань зручності. Точно можна визначити тільки різницю потенціальних енергій.

Залежно від вибору нульового значення потенціальної енергії може створитися ситуація, коли тіло буде мати від'ємну потенціальну енергію. У цьому випадку говорять, що тіло перебуває в **потенціальній ямі (**рис. 4.6). Поняття потенціальної ями має важливе значення у фізиці, зокрема в квантовій механіці.

Величина, що дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергії, називається **повною механічною енергією** частинки:

$$W = W_K + W_P\,. \tag{4.38}$$

У випадку замкнутої системи, в якій відбуваються

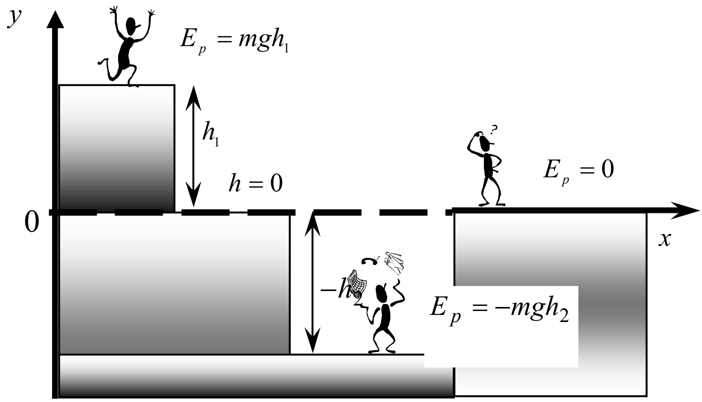


Рисунок 4.6 - Залежність величини потенціальної енергії від вибору нульового значення потенціальної енергії

механічні процеси, повна енергія системи буде дорівнювати повній механічній енергії. Тоді можна сформулювати частинний випадок закону збереження енергії - з**акон збереження енергії в механічних процесах**: повна механічна енергія замкнутої системи, у якій діють тільки консервативні сили, зберігається:

$$W_k + W_p = const\,. \tag{4.39}$$

Проаналізуємо формулу 4.36. Враховуючи, що $dA = \vec{F}d\vec{r}$, отримаємо $\vec{F}d\vec{r} = -dW_P$. Запишемо цей вираз через відповідні проекції:

$$F_x = -\frac{\partial W_P}{\partial x},\;\; F_y = -\frac{\partial W_P}{\partial y},\;\; F_z = -\frac{\partial W_P}{\partial z}\,.$$

Тоді для сили можна записати

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z = -\left(\frac{\partial W_P}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial W_P}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial W_P}{\partial z}\vec{e}_z\right).$$

Вектор

$$\left(\frac{\partial W_P}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial W_P}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial W_P}{\partial z}\vec{e}_z\right) = \mathrm{grad} W_P$$

є **градієнтом функції** W_P.

Таким чином, **консервативна сила** дорівнює градієнту потенціальної енергії частинки, взятому з протилежним знаком:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad} W_P, \text{ або } \vec{F} = -\nabla W_P. \qquad (4.40)$$

4.4.3 ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ В ПОЛІ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Знайдемо потенціальну енергію тіла в полі сили тяжіння Землі. Із закону всесвітнього тяжіння маємо

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Робота дорівнює зміні потенціальної енергії:

$$A = -\int \vec{F} d\vec{r} = -\Delta W_P = W_{P1} - W_{P2},$$

тоді

$$W_{P1} - W_{P2} = -Gm_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Gm_1 m_2}{r_2} - \frac{Gm_1 m_2}{r_1}.$$

з отриманого рівняння бачимо, що **потенціальна енергія гравітаційної взаємодії** дорівнює

$$W_P = -\frac{Gm_1 m_2}{r}. \qquad (4.41)$$

Потенціальну енергію мають не тільки системи ізольованих частинок, але й суцільні деформовані тіла (наприклад, стиснута пружина) (див. рівняння 4.37).

5 ОСНОВИ ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

Будь-який рух твердого тіла можна розкласти на два основних види руху: **поступальний** і **обертальний**. При поступальному русі твердого тіла будь-яка пряма, пов'язана з тілом залишається паралельною сама собі. Під час обертального руху всі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній прямій, яка називається **віссю обертання**.

5.1 ОСНОВНІ ДИНАМІЧНІ ВЕЛИЧИНИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

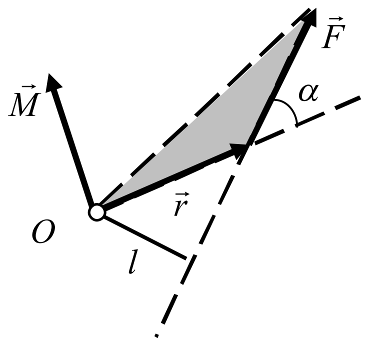


Рисунок 5.1 – До визначення напрямку моменту сили

У випадку, коли тіло не є матеріальною точкою, ефективність дії сили залежить не тільки від величини сили, але й від відстані від осі обертання до напрямку дії даної сили (плеча сили). Такою величиною є м**омент сили.** Це - векторна величина. **Момент сили** дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки обертання до точки прикладення сили і сили, яка діє на тіло

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]. \qquad (5.1)$$

Момент сили спрямований перпендикулярно до площини векторів $\vec{r}$ і $\vec{F}$ згідно з **правилом правого гвинта** (рис.5.1).

Модуль момента сили являє собою добуток довжини радіуса –вектора на нормальну складову сили до нього $F_n = F\sin\alpha$:

$$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha = r \cdot d\,, \qquad (5.2)$$

де d - **плече сили.** Геометрично **плече сили** є найкоротшою відстанню від точки обертання до напрямку дії сили.

Одиницею вимірювання моменту сили є $[M] = 1H \cdot м$.

Ще однією характеристикою руху твердого тіла (системи тіл) є момент імпульсу. **Моментом імпульсу** $\vec{L}$ матеріальної точки відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіуса - вектора $\vec{r}$ матеріальної точки, проведеного з точки O, на імпульс цієї матеріальної точки $\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}$:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]. \qquad (5.3)$$

Врахуємо, що

$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{\mathrm{v}}] = m[\vec{r} \times [\vec{\omega}\vec{r}]] = m(\vec{\omega}(\vec{r}\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\vec{\omega})) = mr^2\vec{\omega} - 0\,.$$

Тоді

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}\,, \qquad (5.4)$$

де $\vec{\omega}$ - кутова швидкість.

Добуток маси матеріальної точки на квадрат її відстані до осі називається **моментом інерції** матеріальної точки відносно осі обертання:

$$I = mr^2\,. \qquad (5.5)$$

Тоді очевидно, що момент імпульсу дорівнює добутку моменту інерції I на кутову швидкість $\vec{\omega}$:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}\,. \qquad (5.6)$$

Одиницею вимірювання моменту імпульсу є $[L]=1Н\cdot м\cdot с$.

Момент інерції тіла характеризує інерціальні властивості тіла при обертальному русі подібно до маси, яка характеризує інерціальні властивості тіла при поступальному русі. Значення моменту інерції залежить як від форми та розмірів тіла, так і від розміщення осі обертання відносно тіла.

Моментом інерції системи (тіла) відносно осі обертання називається сума моментів інерції всіх матеріальних точок відносно цієї осі:

$$I=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 , \tag{5.7}$$

де m_i маса $i-$ї матеріальної точки; r_i - її відстань від даної осі.

У випадку однорідного тіла визначити момент інерції можна за формулою

$$I=\rho\int_V r^2 dV , \tag{5.8}$$

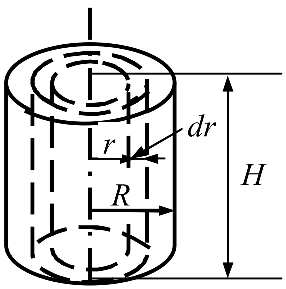


Рисунок 5.2 – До визначення моменту інерції суцільного колового циліндра

де ρ - густина тіла; V - його об'єм. **Одиницею вимірювання моменту інерції** є $[I]=1кг\cdot м^2$.

Визначимо моменти інерції деяких тіл правильної геометричної форми.

1 Момент інерції суцільного колового циліндра (рис. 5.2). Нехай маса циліндра дорівнює m, а радіус відносно його геометричної осі - R. Розіб'ємо уявно циліндр на шари радіуса r і товщиною dr. Маса такого шару дорівнює

$$dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi rhdr .$$

Всі точки шару розміщені на однакових відстанях від осі. Тому його внесок в момент інерції дорівнює

$$dI = \rho r^2 dV = \rho r^2 \cdot 2\pi rhdr = 2\pi\rho hr^3 dr .$$

Візьмемо інтеграл по r в межах від 0 до R

$$I = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} = \rho \cdot \pi R^2 h \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} mR^2 .$$

Отриманий вираз не залежить від висоти циліндра h. Таким чином, формула

$$I = \frac{1}{2} mR^2 \qquad (5.9)$$

також визначає і **момент інерції тонкого диска** відносно осі, що проходить через його центр перпендикулярно до нього.

2 Момент інерції однорідного тонкого стрижня відносно осі, що проходить перпендикулярно до стрижня через його **середину** (рис.5.3).

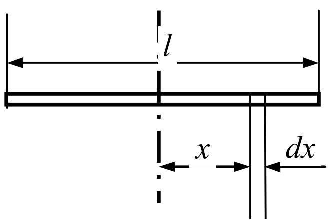


Рисунок 5.3 – До визначення моменту інерції однорідного тонкого стрижня

Візьмемо однорідний стрижень маси m і довжиною l. Уявно розіб’ємо стрижень на малі відрізки. Нехай x - відстань від одного з таких елементів стрижня до осі, а dx - його довжина. Тоді момент інерції цього елемента дорівнює

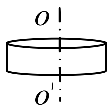
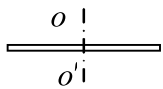
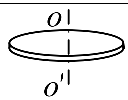
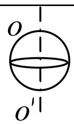
$$dI_C = x^2 dm\,,$$

$$dm = \frac{m}{l}dx\,.$$

Після інтегрування знайдемо **момент інерції однорідного тонкого стрижня** відносно осі, що проходить перпендикулярно до стрижня через його **середину:**

$$I = 2\frac{m}{l}\int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{ml^2}{12}\,. \qquad (5.10)$$

Наведемо значення моменту інерції деяких однорідних тіл відносно осі, що проходить через центр мас цих тіл.

Тіло		Момент інерції
Однорідний диск		$I = \frac{1}{2}mR^2$
Тонкий стрижень		$I = \frac{ml^2}{12}$
Тонкий диск		$I = \frac{1}{4}mR^2$
Однорідна куля		$I = \frac{2}{5}mR^2$

5.2 ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

Моменти інерції тіл відносно осі, яка проходить через центр маси даного тіла, визначені та занесені до відповідних довідників.

Знаходження момента інерції тіла відносно довільної осі значно спрощується, якщо використовувати **теорему Штейнера:**

момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює сумі його момента інерції відносно осі, паралельної даній, що проходить через центр мас тіла та добутку маси тіла на квадрат відстані між осями:

$$I = I_C + ma^2. \tag{5.11}$$

Визначимо за допомогою теореми Штейнера момент інерції стрижня відносно осі, яка проходить через його кінець перпендикулярно до нього.

У цьому випадку

$$I_C = \frac{ml^2}{12} \quad \text{і} \quad a = \frac{l}{2}.$$

Тоді **момент інерції стрижня відносно осі, яка проходить через його кінець,** дорівнює

$$I = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}. \tag{5.12}$$

5.3 ОСНОВНИЙ ЗАКОН ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

Основний закон динаміки обертального руху є аналогом II закону Ньютона у застосуванні до обертання абсолютно твердого тіла. Виведемо його.

Згідно з формулою (5.3) момент імпульсу матеріальної точки дорівнює

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}].$$

Візьмемо до уваги, що

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

тоді

$$\vec{L} = m[\vec{r} \times \vec{v}].$$

З'ясуємо, від чого залежить зміна моменту імпульсу частинки.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\frac{d[\vec{r} \times \vec{v}]}{dt} = m\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{v}}{dt}\right] + m\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\,\vec{v}\right].$$

За визначенням

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt};$$

тоді

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m[\vec{r}\vec{a}] + m[\vec{v} \cdot \vec{v}] = [\vec{r}\vec{F}] = \vec{M}.$$

Таким чином, ми отримали **основний закон динаміки обертального руху в диференціальній формі:**

швидкість зміни моменту імпульсу відносно осі дорівнює моменту сил, що діють на частинку відносно тієї самої осі:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{5.13}$$

Враховуючи (5.6), отримаємо

$$\vec{M} = \frac{d\left(I\vec{\omega}\right)}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon}.$$

Основний закон динаміки обертального руху в інтегральній формі: момент сили дорівнює добутку моменту інерції тіла на його кутове прискорення:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}\ , \tag{5.14}$$

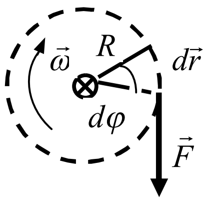


Рисунок 5.4 – До визначення кінетичної енергії обертового тіла. Кутова швидкість $\vec{\omega}$ спрямована від нас (штриховане коло – траєкторія точки прикладення сили).

де I - момент інерції твердого тіла; $\vec{\varepsilon}$ - кутове прискорення.

Якщо обертальний момент сили та момент інерції є сталими ($\vec{M} = const$, $I = const$), то основний закон обертального руху набуде вигляду

$$\vec{M} = I\frac{\vec{\omega} - \vec{\omega}_0}{\Delta t}.$$

5.4 КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ ОБЕРТОВОГО ТІЛА

Кінетична енергія довільної $i-ї$ матеріальної точки масою m_i дорівнює

$$W_{Ki}=\frac{1}{2}m_i v_i^2=\frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2,$$

де $v_i=\omega\cdot r_i$ - швидкість матеріальної точки; ω - кутова швидкість; r_i - відстань від точки до осі обертання. **Кінетична енергія твердого тіла** дорівнює сумі кінетичних енергій усіх матеріальних точок, з яких складається тверде тіло:

$$W_K=\sum W_{Ki}=\frac{1}{2}\omega^2\left(\sum m_i r_i^2\right).$$

Тоді

$$W_K=\frac{1}{2}I\omega^2. \tag{5.15}$$

Ця формула є справедливою у випадку, коли тіло обертається навколо **нерухомої осі**.

У випадку, коли тіло рухається як ціле і одночасно обертається, то його кінетична енергія є сумою кінетичних енергій поступального і обертального рухів:

$$W_K=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2, \tag{5.16}$$

де v_C - швидкість центру мас (центру інерції) твердого тіла; I_C - момент інерції відносно осі, яка проходить через центр мас.

Знайдемо **роботу, яку виконує зовнішня сила під час обертання твердого тіла.** Розглянемо випадок, коли сила спрямована по дотичній до кола, по якому рухається точка прикладення сили.

У цьому випадку сила $\vec{F}$ та переміщення $d\vec{r}$ точки її прикладення паралельні. З рис.5.4 бачимо, що

$$dr = Rd\varphi .$$

Тоді елементарна робота

$$dA = F_s dr = FRd\varphi = Md\varphi .$$

Тобто, **робота зовнішньої сили з обертання тіла** дорівнює добутку проекції моменту сили на напрямок вектора кутової швидкості M на модуль кутового переміщення $d\varphi$:

$$dA = M \cdot d\varphi . \qquad (5.17)$$

Поділимо роботу на час dt, за який тіло повернулося на кут $d\varphi$, тоді отримаємо вираз для **потужності, яку розвиває сила $\vec{F}$ при обертанні тіла:**

$$N = \frac{dA}{dt} = M\frac{d\varphi}{dt} = M\omega . \qquad (5.18)$$

Знак потужності залежить від взаємного спрямування векторів $\vec{M}$ та $\vec{\omega}$. У випадку, коли вони спрямовані в протилежні боки $M < 0$, потужність – від'ємна.

5.5 ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ

Розглянемо систему частинок, на яку діють як внутрішні, так і зовнішні сили. У відповідності до основного закону динаміки обертального руху момент сили відносно довільно вибраної точки *O*

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Для кожної з частинок це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_{i\,зовн} + \vec{M}_{i\,внутр},$$

де $\vec{M}_{i\,зовн}$ - момент зовнішніх сил; $\vec{M}_{i\,внутр}$ - момент внутрішніх сил.

Оскільки момент імпульсу системи відносно точки *O* дорівнює сумі моментів імпульсу окремих частинок

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i \text{, то } \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt}{}_i,$$

тоді

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{i\,зовн} + \sum \vec{M}_{i\,внутр}.$$

Кожний з цих доданків є сумою моментів сил, які діють на $i-$ту частинку. Оскільки сили гравітаційної та кулонівської взаємодії між двома частинками утворюють пару з плечем, яке дорівнює нулю, то їх сумарний момент відносно точки *O* дорівнює нулю. Звідси сума моментів усіх внутрішніх сил для будь-якої системи частинок завжди дорівнює нулю:

$$\sum \vec{M}_{i\,внутр} = 0\,.$$

Тоді отримуємо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{i\,зовн}\,.$$

У випадку, коли система замкнута (тобто зовнішні сили відсутні), $\sum \vec{M}_{i\,зовн} = 0$, звідси випливає **закон збереження моменту імпульсу:** момент імпульсу замкнутої системи матеріальних точок при будь-яких взаємодіях між тілами системи залишається сталим:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const\,. \qquad (5.19)$$

Закон збереження моменту імпульсу можна також записати в такій формі:

$$\sum I\vec{\omega} = const . \qquad (5.20)$$

Закон збереження моменту імпульсу виконується і для незамкнутої системи за умови, що сума моментів зовнішніх сил дорівнює нулю або щоб модуль моменту сили дорівнював нулю. Ця умова виконується під час руху тіл у полі центральних сил, наприклад у системі Сонце – планета. Земля обертається навколо Сонця по практично коловій орбіті. Сила притягання Землі з боку Сонця прикладена до центра Землі і проходить через вісь обертання. Плече, а отже, і момент цієї сили дорівнює нулю. Тому момент імпульсу Землі не змінюється. Якби момент інерції Землі не змінювався, то кутова швидкість обертання Землі теж не змінювалася б. Практично внаслідок безперервного падіння на Землю метеоритів маса і момент інерції Землі повільно збільшуються, що призводить до зменшення кутової швидкості Землі та збільшення доби приблизно на 0,57с за сто років.

Закон збереження моменту імпульсу є фундаментальним законом природи. Він обумовлений ізотропністю простору.

5.5.1 ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНУ ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ

Розглянемо приклади виконання закону збереження моменту імпульсу. Розглянемо замкнуту ізольовану систему, яка обертається з кутовою швидкістю ω_1. Ця система за рахунок переміщення її частин може змінювати момент інерції від I_1 до I_2, $I_3 ... I_i$. Тоді у відповідності до закону збереження моменту імпульсу мають місце співвідношення

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 = I_3\omega_3 = \ldots = I_i\omega_i = const ,$$

де I_1, I_2, I_3, I_i - моменти інерції системи; ω_1, ω_2, ω_3, ω_i - значення кутової швидкості системи у i – му стані.

1 Лава Жуковського (рис.5.5). Припустимо, що лава з людиною на ній обертається з кутовою швидкістю ω_1 (рис.5.5*а*). Коли людина опустить руки з гирями (рис. 5.5б), момент інерції її зменшиться. Оскільки ця дія відбувається за рахунок внутрішніх сил системи, то повний момент імпульсу системи має залишитися сталим. Отже, кутова швидкість ω_2 збільшиться:

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 .$$

2 Гіроскоп. Гіроскопом називається масивне симетричне тіло, яке обертається із значною швидкістю навколо осі симетрії. Гіроскопи стійко зберігають напрямок своїх осей обертання у просторі, і тому використовуються в техніці для визначення і регулювання напрямку руху тіл. Гіроскопами є гірокомпас, автопілот та інші навігаційні прилади. Потрібно відзначити, що дзига, вісь обертання Землі, снаряду, коліс велосипеда і т.п. також є гіроскопами.

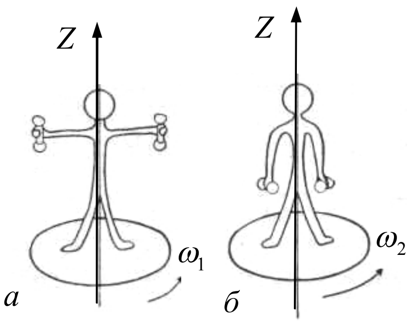


Рисунок 5.5 –Дослід з використанням лави Жуковського для демонстрації виконання закону збереження моменту

5.6 ЗІСТАВЛЕННЯ ФОРМУЛ МЕХАНІКИ ПОСТУПАЛЬНОГО І ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

Основні величини		***Основні закони***		***Зв'язок***
Поступальний рух	***Обертальний рух***	***Поступальний рух***	***Обертальний рух***	
$\vec{S} = \Delta\vec{r}$ - переміщення	$\vec{\varphi}$ - кутове переміщення			$\vec{S} = [\vec{\varphi}\vec{r}]$
$\vec{v}$ - швидкість	$\vec{\omega}$ - кутова швидкість	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$	$\vec{V} = [\vec{\omega}\vec{r}]$
$\vec{a}$ - прискорення	$\vec{\varepsilon}$ - кутове прискорення	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}\vec{r}]$
m - маса	I - момент інерції			$I = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2$
$\vec{F}$ - сила	$\vec{M}$ - момент сили	$\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$; $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$
$\vec{p}$ - імпульс	$\vec{L}$ - момент імпульсу	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$	$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$
A - робота		$dA = F_s ds$	$dA = M_{\omega} d\varphi$	
N - потужність		$N = \frac{dA}{dt} = F_V V$	$N = \frac{dA}{dt} = M\omega$	
W_K - кінетична енергія		$W_K = \frac{mv^2}{2}$	$W_K = \frac{1}{2}I\omega^2$	$W_K = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$

5.7 УМОВИ РІВНОВАГИ ТВЕРДОГО ТІЛА

Умовами рівноваги твердого тіла є:

1) сума всіх сил, що діють на тіло, дорівнює нулю:

$$\sum \vec{F} = 0; \qquad (5.21)$$

2) сума всіх моментів сил, що діють на тіло, дорівнює нулю:

$$\sum \vec{M} = 0. \qquad (5.22)$$

5.7.1 ВИДИ РІВНОВАГИ

1 **Стійка рівновага** спостерігається, коли тіло, виведене зі стану рівноваги, самочинно повертається у вихідне положення.

2 **Нестійка рівновага**: тіло, виведене зі стану рівноваги, продовжує відхилятися від цього положення.

3 **Індиферентна** (байдужа) рівновага: тіло, виведене зі стану рівноваги, залишається у новому положенні.

Залежність потенціальної енергії від координати для трьох видів рівноваги наведена на рисунку 5.6. З рисунка бачимо, що точкам рівноваги відповідає умова

$$\frac{dW_P}{dx} = 0.$$

При цьому стійкій рівновазі відповідає умова

$$\frac{d^2W_P}{dx^2} > 0,$$

нестійкій -

$$\frac{d^2W_P}{dx^2} < 0,$$

та індиферентній рівновазі -

$$\frac{d^2W_P}{dx^2} = 0.$$

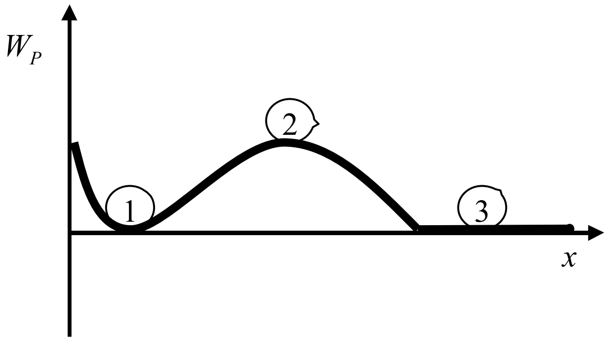


Рисунок 5.6 – Види рівноваги тіл:
1 стійка рівновага; 2 нестійка рівновага; 3 індиферентна