

19 ЗАКОНИ ТЕПЛОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

19.1 Закон Стефана-Больцмана

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\omega,T} d\omega = \sigma T^4,$$

де $R_e = \frac{W}{St}$ – енергетична світність абсолютно чорного тіла; W – енергія, що випромінюється тілом за час t ; S – його площа; $r_{\omega,T}$ – випромінювальна здатність; ω – циклічна частота випромінювання; T – термодинамічна температура; σ – стала Стефана-Больцмана [$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$].

19.2 Енергетична світність сірого тіла

$$R_e = a_r \sigma T^4,$$

де a_r – коефіцієнт чорноти (коефіцієнт поглинання) сірого тіла.

19.3 Закон зміщення Віна

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

де λ_m – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання; b – стала закону зміщення Віна ($b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$).

19.4 Формула Планка

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1},$$

$$r_{\omega,T} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1},$$

де $r_{\lambda,T}$, $r_{\omega,T}$ – випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла; λ – довжина хвилі; ω – циклічна частота; c – швидкість світла у вакуумі; k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура; h – стала Планка; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – стала Планка, розділена

на 2π ($\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с).

19.5 Залежність максимальної випромінювальної здатності від температури

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = CT^5,$$

де C – стала [$C = 1,30 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м³·К⁵)].

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 19.1 Визначити енергію W , що випромінюється за час $t = 1$ хв зі спостережувального вікна плавильної пічі площею $S = 8 \text{ см}^2$, якщо її температура $T = 1,2 \text{ кК}$.

Розв'язання

$W - ?$
$S = 8 \text{ см}^2 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$
$t = 1 \text{ хв} = 60 \text{ с},$
$T = 1,2 \text{ кК}.$

Потік енергії, яка випромінюється зі спостережувального вікна плавильної печі, дорівнює

$$\Phi_e = R_e S. \tag{1}$$

Енергетичну світність абсолютно чорного тіла, яким можна вважати це вікно, визначимо із закону Стефана-Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4. \tag{2}$$

Енергія, що випромінюється піччю, дорівнює

$$W = \Phi_e t. \tag{3}$$

Підставивши співвідношення (2) (3) в (1), одержимо

$$W = \sigma T^4 S t.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин отримуємо остаточно:

$$W = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (1,2 \cdot 10^3)^4 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 60 = 5643,5 \text{ (Дж)}.$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[W] = [\sigma][T]^4[S][t] = (\text{Вт}/\text{м}^2 \text{ К}^4) \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с} = \text{Вт} \cdot \text{с} = \text{Дж}.$$

Відповідь: $W = 5643,5$ Дж.

Приклад 19.2 Як і у скільки разів зміниться енергетична світність абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання переміститься з червоної межі видимого спектра ($\lambda_{m1} = 780 \text{ нм}$) на фіолетову ($\lambda_{m2} = 390 \text{ нм}$)?

Розв'язання

$\Phi_{e1}/\Phi_{e2} - ?$	Потік енергії, що випромінюється тілом, дорівнює	
$\lambda_{m1} = 780 \text{ нм},$		$\Phi_e = R_e S,$ (1)
$\lambda_{m2} = 390 \text{ нм}.$		де R_e – енергетична світність абсолютно чорного тіла; S - його площа.

Енергетичну світність абсолютно чорного тіла визначимо з рівняння Стефана-Больцмана

$$R_e = \sigma T^4. \quad (2)$$

Для знаходження температури тіла скористаємося законом зміщення Віна

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \Rightarrow T = \frac{b}{\lambda_m}. \quad (3)$$

Підставивши вираз (2) і (3) в (1), одержимо

$$\Phi_e = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4 S. \quad (4)$$

Для різних довжин хвиль потік енергії, що випромінюється тілом, визначається такими виразами:

$$\Phi_{e1} = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{m1}} \right)^4 S, \quad (5)$$

$$\Phi_{e2} = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{m2}} \right)^4 S. \quad (6)$$

Розділивши рівняння (6) на (5), одержимо

$$\frac{\Phi_{e2}}{\Phi_{e1}} = \frac{\sigma (b / \lambda_{m2})^4 S}{\sigma (b / \lambda_{m1})^4 S} = \left(\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}} \right)^4. \quad (7)$$

Підставивши у вираз (7) числові значення величин, одержимо

$$\frac{\Phi_{e2}}{\Phi_{e1}} = \frac{(780 \cdot 10^{-9})^4}{(390 \cdot 10^{-9})^4} = (2)^4 = 16.$$

Відповідь: $\frac{\Phi_{e2}}{\Phi_{e1}} = 16.$

Приклад 19.3 При збільшенні термодинамічної температури T абсолютно чорного тіла у два рази довжина хвилі λ_m , на яку припадає максимум випромінювальної здатності, зменшилася на $\Delta\lambda = 400$ нм. Визначити початкову і кінцеву температури T_1 і T_2 .

Розв'язання

$$\begin{array}{l} T_1 - ? \quad T_2 - ? \\ \hline \Delta\lambda = 400 \text{ нм.} \end{array}$$

У відповідності до закону зміщення Віна довжина, на яку припадає максимум випромінювальної здатності, дорівнює

$$\lambda_m = \frac{b}{T}. \quad (1)$$

Для різних довжин хвиль цей вираз запишеться у вигляді:

$$\lambda_{m1} = \frac{b}{T_1}, \quad (2)$$

$$\lambda_{m2} = \frac{b}{T_2}. \quad (3)$$

За умовою задачі

$$\Delta\lambda = \lambda_{m1} - \lambda_{m2} = \frac{b}{T_1} - \frac{b}{T_2}. \quad (4)$$

Врахуємо, що $T_2 = 2T_1$, тоді одержимо

$$\Delta\lambda = \frac{b}{T_1} - \frac{b}{2T_1} = \frac{b}{2T_1}.$$

Звідси

$$T_1 = \frac{b}{2\Delta\lambda}, \quad (5)$$

$$T_2 = 2T_1 = \frac{b}{\Delta\lambda}. \quad (6)$$

Підставивши у вирази (5) та (6) числові значення величин, одержимо

$$T_1 = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 400 \cdot 10^{-9}} = 3,625 \cdot 10^3 (K),$$

$$T_2 = 2T_1 = 7,25 \cdot 10^3 (K).$$

Перевіримо розмірності одиниць одержаної величини:

$$T = \frac{[b]}{[\lambda]} \Rightarrow m \cdot K / m = K .$$

Відповідь: $T_1 = 3,625 \cdot 10^3 K$; $T_2 = 7,25 \cdot 10^3 K$.

Приклад 19.4 Муфельна піч, яка споживає потужність $N = 1$ кВт, має отвір площею $S = 100 \text{ см}^2$. Визначити частку ω потужності, що розсіюється стінками печі, якщо температура її внутрішньої поверхні дорівнює $T = 1 \text{ кК}$.

Розв'язання

Потік енергії, що випромінюється через отвір муфельної пічки, дорівнює

$\omega - ?$
$N = 1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт},$
$S = 100 \text{ см}^2 = 10^{-2} \text{ м}^2,$
$T = 1 \text{ кК} = 10^3 \text{ К}.$

$$\Phi_e = R_e S, \quad (1)$$

де R_e -енергетична світність отвору.

Отвір муфельної пічки можна розглядати як абсолютно чорне тіло, звідси, скориставшись законом Стефана-Больцмана, можна записати:

$$R_e(T) = \sigma T^4. \quad (2)$$

Підставивши цей вираз у (1), отримаємо

$$\Phi_e(T) = \sigma T^4 S.$$

Скориставшись законом збереження енергії, запишемо

$$\eta N = \Phi_e(T) = \sigma T^4 S.$$

Звідси

$$\eta = \frac{\sigma T^4 S}{N}.$$

Підставивши числові значення фізичних величин, отримаємо відповідь

$$\eta = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (10^3) \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{10^3} = 0,57.$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[\eta] = \frac{[\sigma][T]^4[S]}{[N]} = ((\text{Вт}/\text{м}^2 \text{ К}^4) \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м}^2) / \text{Вт} = 1.$$

Відповідь: $\eta = 0,57$.

Приклад 19.5 Розрахувати істинну температуру T розжареної вольфрамової стрічки, якщо радіаційний пірометр показує температуру $T_{\text{рад}} = 2,5 \text{ К}$. Прийняти, що поглинальна здатність для вольфраму не залежить від частоти випромінювання і дорівнює $a_T = 0,35$.

$T - ?$	<p>Розв'язання Радіаційною температурою T_{rad} називається температура при якій енергетична світність R_e^* абсолютно чорного тіла дорівнює енергетичній світності R_e тіла, що досліджується при його справжній температурі T:</p>
$T_{rad} = 2,5 \times 10^3 K,$ $a_T = 0,35.$	

$$R_e^*(T_{rad}) = R_e(T). \quad (1)$$

Енергетичні світності чорного та сірого тіл знайдемо з закону Стефана-Больцмана:

$$R_e^*(T_{rad}) = \sigma T_{rad}^4, \quad (2)$$

$$R_e(T) = a\sigma T^4. \quad (3)$$

Підставивши вирази (2) (3) у (1), одержимо

$$\sigma T_{rad}^4 = a\sigma T^4. \quad (4)$$

З цього співвідношення істинна температура вольфрамової стрічки дорівнює

$$T = \frac{1}{\sqrt[4]{a}} T_{rad}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин отримаємо

$$T = \frac{1}{\sqrt[4]{0,35}} \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 3250(K).$$

Відповідь: $T=3250 K.$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

19.1 Визначити енергію, яку випромінює поверхня розплавленої платини площею $S = 50 \text{ см}^2$ за $t = 1 \text{ хв}$, якщо поглинальна здатність платини $a_T = 0,8$. Температура плавлення платини дорівнює $T = 1770^\circ \text{C}$.

Відповідь: $W = 237 \text{ кДж}$.

19.2 Середня енергетична світність поверхні Землі дорівнює $R_e = 0,54 \text{ Дж} / (\text{см}^2 \cdot \text{хв})$. Якою має бути температура T поверхні Землі, якщо умовно вважати, що вона випромінює як сіре тіло з коефіцієнтом чорноти $a_T = 0,25$?

Відповідь: $T = 280 \text{ К}$.

19.3 Беручи коефіцієнт чорноти вугілля при температурі $T = 600 \text{ К}$ таким, що дорівнює $a_T = 0,8$, визначити: а) енергетичну світність R_e вугілля; б) енергію W_e , випромінювану з поверхні вугілля площею $S = 5 \text{ см}^2$ за час $t = 10 \text{ хв}$.

Відповідь: $R_e = 5,88 \text{ кДж} / (\text{м}^2 \cdot \text{с})$; $W_e = 1,76 \text{ кДж}$.

19.4 Визначити відносне збільшення $\Delta R_e / R_e$ енергетичної світності абсолютно чорного тіла при збільшенні його температури на 1%.

Відповідь: $\Delta R_e / R_e = 4\%$.

19.5 Визначити, у скільки разів необхідно зменшити термодинамічну температуру чорного тіла, щоб його енергетична світність зменшилася у 16 разів.

Відповідь: $T_1 / T_2 = 2$.

19.6 Яку температуру має тіло, яке при температурі навколишнього середовища $T = 17^\circ \text{C}$ випромінює енергії в $n=100$ разів більше, ніж поглинає?

Відповідь: $T = 916 \text{ К}$.

19.7 Чорне тіло має температуру $T_1 = 500\text{ K}$. Якою буде температура T_2 тіла, якщо в результаті нагрівання енергетична світність тіла збільшиться в $n = 5$ разів?

Відповідь: $T_2 = 748\text{ K}$.

19.8 Знайти температуру печі, якщо відомо, що з отвору в ній, розміром $S = 6,1\text{ см}^2$, за час $t = 1\text{ с}$ випромінюється $W = 35\text{ Дж}$ енергії. Випромінювання вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла.

Відповідь: $T = 1\text{ кК}$.

19.9 Яку кількість енергії випромінює Сонце за $t = 1\text{ хв}$? Випромінювання Сонця вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла. Температуру поверхні Сонця взяти такою, що дорівнює $T = 5,8\text{ кК}$.

Відповідь: $W = 2,34 \cdot 10^{29}\text{ Дж}$.

19.10 Розжарена металева поверхня площею $S = 10\text{ см}^2$ випромінює за одну хвилину $W = 4 \cdot 10^4\text{ Дж}$ енергії. Температура поверхні дорівнює $T = 2,5\text{ кК}$. Знайти: а) яке було б випромінювання цієї поверхні, якби вона була абсолютно чорною; б) відношення енергетичних світностей цієї поверхні і абсолютно чорного тіла при даній температурі.

Відповідь: а) $W = 1,33 \cdot 10^5\text{ Дж}$. б) $a_T = 0,3$.

19.11 Діаметр вольфрамової спіралі в електричній лампочці дорівнює $d = 0,3\text{ мм}$, довжина спіралі $l = 5\text{ см}$. При вмиканні лампочки у коло з напругою $U = 127\text{ В}$ через неї проходить струм силою $I = 0,31\text{ А}$. Знайти температуру лампочки. Вважати, що при рівновазі все тепло, що виділяється в нитці, йде на випромінювання. Відношення енергетичних світностей вольфраму та абсолютно чорного тіла вважати для цієї температури таким, що дорівнює 0,31.

Відповідь: $T = 2,5\text{ кК}$.

19.12 Температура вольфрамової спіралі в 25-ватній електричній лампочці дорівнює $T = 2,45\text{ кК}$. Відношення її енергетичної

світності до енергетичної світності абсолютно чорного тіла при даній температурі дорівнює $a_T = 0,3$. Знайти величину випромінювальної поверхні спіралі.

Відповідь: $S = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$.

19.13 Знайти величину сонячної сталої, тобто кількість променистої енергії, що випромінюється Сонцем щохвилини через площадку в $S = 1 \text{ см}^2$, перпендикулярну до сонячних променів, яка розміщена на такій самій відстані від нього, що і Земля. Температуру поверхні Сонця взяти такою, що дорівнює $T = 5800 \text{ К}$. Випромінювання Сонця вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла.

Відповідь: $N_C = 1,37 \cdot 10^3 \text{ кВт}$.

19.14 Енергетична світність чорного тіла $R_e = 10 \text{ кВт/м}^2$. Визначити довжину хвилі, яка відповідає максимуму спектральної густини енергетичної світності цього тіла.

Відповідь: $\lambda_m = 4,47 \text{ мкм}$.

19.15 Температура абсолютно чорного тіла $T = 2 \text{ К}$. Визначити довжину хвилі λ_m , на яку припадає максимум енергії випромінювання, і випромінювальну здатність $(r_{\lambda,T})_m$ для цієї довжини хвилі.

Відповідь: $\lambda_m = 1,45 \text{ мкм}$; $(r_{\lambda,T})_m = 413 \text{ ГВт/м}^3$.

19.16 Визначити температуру T і енергетичну світність абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 600 \text{ нм}$.

Відповідь: $T = 4830 \text{ К}$; $R_e = 31 \text{ МВт/м}^3$.

19.17 Максимум випромінювальної здатності Сонця припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 0,48 \text{ мкм}$. Вважаючи, що Сонце випромінює, як чорне тіло, визначити: а) температуру його поверхні; б) потужність, що випромінюється поверхнею.

Відповідь: а) $T = 6,04 \text{ К}$; б) $N = 4,58 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$.

19.18 Знайти, яку кількість енергії з $S = 1 \text{ см}^2$ поверхні за $t = 1 \text{ с}$ випромінює абсолютно чорне тіло, якщо відомо, що його максимальна випромінювальна здатність припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 484 \text{ нм}$.

Відповідь: $W = 7,35 \text{ Дж}$.

19.19 У яких частинах спектра містяться довжини хвиль, що відповідають максимуму випромінювальної здатності, якщо джерелом світла є: а) спіраль електричної лампочки ($T = 3 \text{ К}$), б) поверхня Сонця ($T = 6 \text{ К}$) і в) атомна бомба, у якій у момент вибуху температура досягає 10 млн градусів. Випромінювання вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла.

Відповідь: а) $\lambda_m = 1 \text{ мкм}$ – інфрачервона область;

б) $\lambda_m = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ – область видимого світла;

в) $\lambda_m \sim 0,3 \text{ нм}$ – область рентгенівських променів.

19.20 На яку довжину хвилі припадає максимум випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла, що має температуру тіла людини, тобто $T = 37^\circ \text{ C}$?

Відповідь: $\lambda_m = 9,3 \text{ мкм}$.

19.21 Абсолютно чорне тіло має температуру $T_1 = 2,9 \text{ К}$. У результаті охолодження цього тіла довжина хвилі, на яку припадає максимум випромінювальної здатності, змінилася на $\Delta\lambda = 9 \text{ мкм}$. До якої температури T_2 охолодилося тіло?

Відповідь: $T_2 = 290 \text{ К}$.

19.22 Поверхня тіла нагріта до температури $T = 1 \text{ К}$. Потім одна половина цієї поверхні нагрівається на $\Delta T = 100 \text{ К}$, інша прохолоджується на $\Delta T = 100 \text{ К}$. У скільки разів зміниться енергетична світність поверхні цього тіла?

Відповідь: збільшиться в 1,06 разу.

19.23 Яку потужність треба підводити до зачорненої металевої кульки радіусом $r = 2 \text{ см}$, щоб підтримувати її температуру на $\Delta T = 27^\circ \text{ C}$ вищою за температуру навколишнього середови-

ща? Температура навколишнього середовища дорівнює $T = 20^{\circ}C$. Вважати, що тепло втрачається тільки внаслідок випромінювання.

Відповідь: $N = 0,84$ Вт.

19.24 Визначити поглинальну здатність тіла, для якого температура, виміряна радіаційним пірометром, доівнює $T_{рад} = 1,4$ кК, тоді як справжня температура тіла дорівнює $T = 3,2$ кК.

Відповідь: $a_T = 0,037$.

19.25 Істинна температура розжареної вольфрамової стрічки дорівнює $T = 3,5$ кК. Яку температуру показує радіаційний пірометр, якщо поглинальна здатність вольфраму не залежить від частоти випромінювання і дорівнює $a_T = 0,35$?

Відповідь: $T_{рад} = 2692$ К.