16 ОСНОВИ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ОПТИКИ. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

16.1 Абсолютний показник заломлення середовища

$$n = \frac{c}{\mathrm{v}} = \sqrt{\varepsilon\mu} \ ,$$

де c – швидкість світла у вакуумі; v – фазова швидкість електромагнітної хвилі у середовищі; ε і μ - діелектрична та магнітна проникності речовини.

Для середовища, яке не має феромагнітних властивостей, $\mu = 1$, тоді

$$n = \sqrt{\varepsilon} \ .$$

16.2 Відносний показник заломлення двох середовищ

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \, .$$

Для неферомагнітних середовищ

$$n_{21} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \, .$$

16.3 Граничний кут повного внутрішнього відбиття

$$\sin\alpha_{гр} = n_{21} \, .$$

16.4 Оптична довжина шляху світлової хвилі

$$L = nl \, ,$$

де l – геометрична довжина шляху світлової хвилі у середовищі з показником заломлення n.

16.5 Оптична різниця ходу двох світлових хвиль

$$\Delta = L_2 - L_1 = n_2 l_2 - n_1 l_1 ,$$

де n_1 і n_2 - показники заломлення середовищ, в яких поширюються хвилі.

16.6 Зв'язок різниці фаз із оптичною різницею ходу світлових хвиль

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\,\Delta}{\lambda},$$

де λ – довжина світлової хвилі.

16.7 Закон Снелліуса для заломлення світла

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{21} ,$$

де n_{12} - відносний показник заломлення.

16. 8 Умова спостереження інтерференційних максимумів

$$\Delta = \pm k\lambda , \quad (k = 0,1,2,\dots),$$

де k – порядок інтерференції.

16.9 Умова спостереження інтерференційних мінімумів

$$\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (k = 0,1,2,\dots),$$

16.10 Ширина інтерференційної смуги у дослідах Юнга

$$\Delta X = \frac{L}{d}\lambda ,$$

де L - відстань від щілини до екрану, на якому спостерігається інтерференція; d - відстань між щілинами.

16.11 Оптична різниця ходу світлових хвиль, що виникає при відбиванні монохроматичного світла від тонкої плівки:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \frac{\lambda}{2},$$

або

$$\Delta = 2dn\cos\beta + \frac{\lambda}{2},$$

де d – товщина плівки; n – показник заломлення плівки; α – кут падіння; β – кут заломлення світла в плівці.

16.12 Радіуси світлих кілець Ньютона у відбитому світлі та темних кілець у прохідному світлі

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}}, \ (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

де k – номер кільця; R – радіус кривизни лінзи.

16.13 Радіуси темних кілець Ньютона у відбитому світлі та світлих кілець у прохідному світлі

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}, \ (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 16.1 Визначити довжину l відрізка, на якому укладається стільки ж довжин хвиль світла у вакуумі, скільки їх укладається на відрізку довжиною $l_1 = 3\ мм$ у воді.

$l - ?$

$l_1 = 3\ мм \quad 3 \cdot 10^{-3}\ м,$

$n = 1,33.$

Розв'язання

Відомо, що за час одного періоду коливань хвиля поширюється на відстань, яка дорівнює її довжині. Тому для випадку поширення світла у воді можна записати

$$\lambda = vT = \frac{c}{n}T = \frac{\lambda_0}{n}, \qquad (1)$$

де λ – довжина хвилі у вакуумі; λ_1 - в середовищі; v- швидкість світла у воді; n – показник заломлення середовища.

Відповідно до умови задачі маємо, що на відрізках l і l_1 укладається однакова кількість довжин хвиль:

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{l_1}{\lambda_1}. \qquad (2)$$

Підставимо співвідношення (1) у (2), тоді одержуємо

$$l = l_1 n .$$

Після підстановки значень фізичних величин у отримане співвідношення знайдемо

$$l = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 1,33 \quad 4 \cdot 10^{-3}\,(м).$$

Відповідь: $l = 4 \cdot 10^{-3}\ м$.

Приклад 16.2 Дві когерентні плоскі світлові хвилі з довжиною λ падають майже нормально на екран, як показано на рисунку 1. Амплітуди хвиль однакові і кут між їх напрямками поширення складає $\varphi << 1$. Знайти відстань між сусідніми максимумами на екрані.

Розв’язання

$\Delta X - ?$
λ,
$\varphi << 1$.

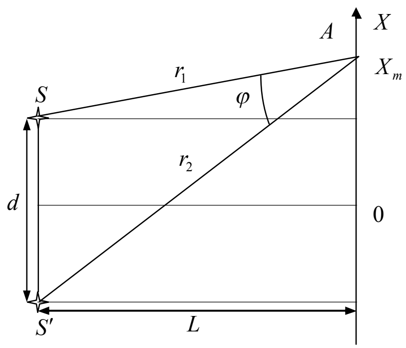

Рисунок 1

Розв’язання

На рисунку 1 зазначені джерела хвиль S і S', відстань між якими дорівнює d. Хвилі інтерферують у точці А екрана, поширюючись у повітрі (показник заломлення $n = 1$). Відповідно координата m-го інтерференційного максимуму дорівнює X_m. З рисунка 1 простежується, що оптичні довжини шляху хвиль від двох джерел у точці А дорівнюють:

$$r_2^2 = L^2 + \left(X_m + \frac{d}{2} \right)^2, \; r_1^2 = L^2 + \left(X_m - \frac{d}{2} \right)^2,$$

Звідси знайдемо, що

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) =$$
$$= L^2 + \left(X_m + \frac{d}{2} \right)^2 - L^2 - \left(X_m + \frac{d}{2} \right)^2 = 2X_m d \; .$$

Враховуючи, що оптична різниця ходу променів дорівнює:

$$\Delta = r_2 - r_1 \, ,$$

отримаємо

$$\Delta(r_2 + r_1) = 2X_m d \; .$$

Оскільки відстань L від джерел хвиль до екрана істотно більша за відстань між джерелами d, то можна вважати, що $r_1 + r_2 = 2L$. У результаті знайдемо, що

$$\Delta(r_1 + r_2) = 2\Delta L = 2X_m d \; ,$$

звідки одержуємо

$$\Delta = \frac{2dX_m}{r_2 + r_1} \, .$$

У випадку малих кутів $\varphi \sim tg\varphi = \frac{d}{L}$, звідси

$$\Delta = \frac{X_m d}{L} \sim X_m \varphi \, .$$

Використовуючи умову спостереження інтерефеacierенцій-ного максимуму $\Delta = m\lambda$, знайдемо координату m-го максимуму:

$$m\lambda = X_m \varphi \Rightarrow X_m = \frac{m\lambda}{\varphi}. \qquad (2)$$

Відповідно відстань між сусідніми максимумами дорівнює:

$$\Delta X = X_{m+1} - X_m = \frac{(m-1)\lambda}{\varphi} - \frac{m\lambda}{\varphi} = \frac{\lambda}{\varphi}.$$

Відповідь: $\Delta X = X_{m+1} - X_m = \dfrac{\lambda}{\varphi}$.

Приклад 16.3 У схемі спостереження інтерференції, запропонованої Ллойдом (рисунок 2), світлова хвиля, що падає на екран безпосередньо від джерела світла S, інтерферує із хвилею, що відбилася від дзеркала. Визначити ширину ΔX інтерференційних смуг на екрані за умови, що відстань від джерела до дзеркала $h = 1\,мм$, відстань від джерела до екрана $L = 1\,м$, довжина хвилі $\lambda = 500\,нм$.

Розв'язання

$\Delta X - ?$

$h = 1\,мм = 10^{-3}\,м,$

$L = 1\,м,$

$\lambda = 500\,нм \quad 5\cdot 10^{-7}\,м.$

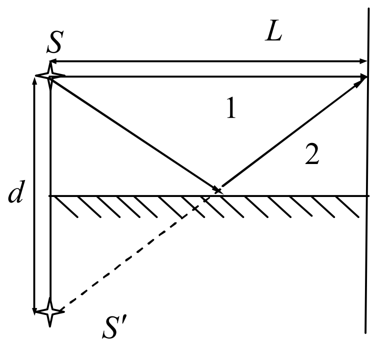

Рисунок 2

На рисунку 2 показано, як світлова хвиля 1, що падає на екран із джерела світла S, інтерферує з відбитою від дзеркала світловою хвилею 2. Після продовження променя 2 спостерігаємо, що хвиля 2 виходить із уявного джерела світла S'. Тому інтерференційна картина на екрані є аналогічною картині інтерференції від двох точкових джерел S і S'. Відстань між джерелами d у два рази більша відстані від реального джерела S до дзеркала АВ: $d = 2h$. Скористаємося виразом, що пов'язує оптичну різницю ходу Δ з координатою m-го максимуму X_m (приклад 1, співвідношення (1)):

$$\Delta = \frac{X_m d}{L} = \frac{2X_m h}{L}.$$

Використовуючи умову інтерференційного максимуму $\Delta = m\lambda$, одержуємо для координати m-го максимуму вираз:

$$X_m = \frac{mL\lambda}{2h}.$$

Ширина інтерференційної смуги на екрані (відстань ΔX між сусідніми максимумами) дорівнює

$$\Delta X = X_{m+1} - X_m = \frac{L\lambda}{2h}.$$

При підстановці числових значень фізичних величин отримаємо для ширини інтерференційної смуги

$$\Delta X = \frac{1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \cdot 10^{-4}\ м.$$

Відповідь: $\Delta X = \frac{1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \cdot 10^{-4}\,(м)$.

Приклад 16.4 На скляний клин з малим кутом нормально до його грані падає паралельний пучок променів монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}6$ мкм. Кількість m інтерференційних смуг, що при цьому виникає і припадає на відрізок клина довжиною $l = 1\,мм$, дорівнює $m = 10$. Знайти кут θ між гранями клина.

Розв'язання

$\theta - ?$

$\lambda = 0{,}6\ мкм = 6\cdot 10^{-7}\ м,$

$l = 1\,мм = 10^{-3}\ м,$

$m = 10,$

$n = 1{,}5.$

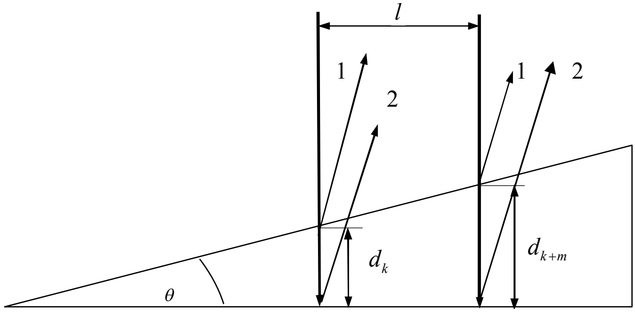

Рисунок 3

Темні смуги спостерігаються на тих ділянках клина, для яких різниця ходу променів кратна непарному числу половин довжини хвилі:

$$\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}\ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (1)$$

Різниця ходу Δ двох хвиль складається з різниці оптичних довжин шляхів цих хвиль $\left(2dn\cos\gamma\right)$ і половини довжини хвилі ($\lambda/2$). Величина $\lambda/2$ є додатковою різницею ходу, що виникає при відбиванні світлової хвилі 1 від оптично більш щільного середовища. Підставляючи у формулу (1) різницю ходу Δ світлових хвиль, одержимо

$$\left(2d_k n\cos\gamma + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}\right), \qquad (2)$$

де n - показник заломлення скла (n =1,5); d_k - товщина клина в тому місці, де спостерігається темна смуга, що відповідає номеру k; γ - кут заломлення світла.

Згідно з умовою задачі кут падіння дорівнює нулю; отже, і кут заломлення γ дорівнює нулю, а тому $\cos\gamma = 1$. Розкривши дужки в правій частині виразу (2), після спрощення отримаємо

$$2d_k n = k\lambda. \qquad (3)$$

Нехай довільній темній смузі k-го номера відповідає товщина d_k клина, а темній смузі $k+m$ -го номера - товщина d_{k+m} клина. Тоді (рис.1), враховуючи, що m смуг укладається на відстані l, знайдемо:

$$tg\theta = \frac{\left(d_{k+m} - d_k\right)}{l}. \qquad (4)$$

При малих кутах $tg\theta \approx \sin\theta \approx \theta$.

Виразимо з (3) d_k і d_{k+m}, підставимо їх у співвідношення (4) та отримаємо

$$\theta = \frac{(k+m)\lambda - k\lambda}{2nl} = \frac{m\lambda}{2nl}.$$

Підставимо значення фізичних величин та виконаємо обчислення:

$$\theta = \frac{10 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-3} \left(рад \right).$$

Виразимо кут θ в градусах. Для цього можна скористатися співвідношеннями між радіаном і градусом:

$$1\,рад = 57{,}3^0 .$$

Тоді $\theta = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 57{,}3^0 = 0{,}11^0$.

Відповідь: $2 \cdot 10^{-3}\ рад = 0{,}11^0$.

Приклад 16.5 Між скляною пластинкою і плоско-опуклою лінзою, що лежить на ній, міститься рідина (рис.4). Знайти показник заломлення рідини, якщо радіус r третього темного кільця Ньютона при спостереженні у відбитому світлі з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}6\ мкм$ дорівнює 0,82 мм. Радіус кривини лінзи $R = 0{,}5$ м.

Розв'язання

$n - ?$

$r = 0{,}82\ мм \quad 8{,}2 \cdot 10^{-4}\ м,$

$\lambda = 0{,}6\ мкм \quad 6 \cdot 10^{-7}\ м,$

$k = 3,$

$R = 0{,}5\ м.$

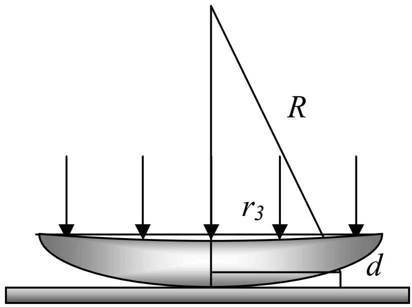

Рисунок 4

Схема установки спостереження кілець Ньютона зображена на рис. 4. З рисунка зрозуміло, що

$$R^2 = (R-b)^2 + r^2 = R^2 - 2Rb + r^2, \tag{1}$$

де R – радіус кривини лінзи; b – товщина зазору між лінзою і скляною пластинкою.

У виразі (1) ми знехтували величиною b^2 порівняно з $2Rb$. З цього співвідношення після простих перетворень отримаємо

$$b = \frac{r^2}{2R}. \tag{2}$$

Оптична різниця ходу двох променів, відбитих від верхньої і нижньої поверхонь зазору між пластиною і лінзою, дорівнює

$$\Delta = 2bn = 2\frac{r^2}{2R}n = \frac{r^2}{R}n, \tag{3}$$

де n - коефіцієнт заломлення рідини у зазорі.

Щоб урахувати, що при відбитті від пластинки виникає зміна фази світла на π, до правої частини виразу (3) додамо $\lambda / 2$.

Умова спостереження інтерференційного мінімуму має вигляд

$$\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{4}$$

де k - порядок інтерференційного мінімуму.

Прирівнявши вирази (3) і (4), знайдемо:

$$\frac{r^2}{R}n + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \tag{5}$$

Після перетворень отримаємо таке співвідношення:

$$\frac{r^2}{R}n = (2k+1)\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}(2k+1-1) = k\lambda.$$

З цього виразу знайдемо n:

$$n = \frac{r^2}{k\lambda R}. \tag{6}$$

У випадку третього кільця Ньютона $k = 3$.

Після підстановки числових значень фізичних величин у (6) отримаємо

$$n = \frac{(0{,}82 \cdot 10^{-3})^2}{3 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5} = 1{,}34.$$

Відповідь: $n = 1{,}34$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

16.1 Промінь світла падає на плоскопаралельну скляну пластину товщиною $d = 6\,см$ під кутом $\alpha = 60°$ до нормалі. Знайти величину зміщення променя, який пройшов через цю пластину.
Відповідь: $\Delta x = 3{,}08\,см$.
16.2 Визначити граничні кути повного внутрішнього відбивання світла для поверхонь поділу:
а) скло – повітря; б) вода – повітря; в) скло – вода.
Показник заломлення скла дорівнює $n = 1{,}52$.
Відповідь: а) $\alpha_{гр} = 41^0 8'$; б) $\alpha_{гр} = 48^0 45'$; в) $\alpha_{гр} = 61^0 10'$.
16.3 При падінні білого світла під кутом $\alpha = 45^0$ на скляну пластинку кути заломлення для променів різних довжин хвиль виявилися такими:

$\lambda, нм$	759	687	589	486	397
γ	$24^0 2'$	$23^0 57'$	$23^0 47'$	$23^0 27'$	$22^0 57'$

Побудувати графік залежності показника заломлення матеріалу пластинки від довжини хвилі.
16. 4 На дно посудини, наповненої водою до висоти $h = 10\,см$, поміщене точкове джерело світла. На поверхні води плаває кругла непрозора пластинка так, що її центр міститься над джерелом світла. Який найменший радіус має бути у цієї пластинки, щоб жоден промінь не зміг вийти через поверхню води?
Відповідь: $r = 0{,}114\,м$.
16.5 У посудині з водою на глибині $h = 25\,см$ міститься точкове джерело світла. Над ним плаває непрозоре коло. При якому найменшому діаметрі кола світло не вийде з води?
Відповідь: $d = 0{,}285\,м$.
16.6 Який шлях пройде фронт хвилі монохроматичного світла у вакуумі за той самий час, за який він проходить шлях $l = 1\,м$ у воді?
Відповідь: $s = 1{,}33\,м$.

16.7 Показники заломлення деякого сорту скла для червоного та фіолетового променів дорівнюють відповідно $n_Ч = 1,51$ та $n_Ф = 1,51$. Знайти граничні кути повного внутрішнього відбивання при падінні цих променів на межу поділу: скло – повітря.
Відповідь: $\varphi_Ч = 41^0 28'$; $\varphi_Ф = 40^0 49'$.

16.8 На плоскопаралельну скляну пластину товщиною $d = 1\,см$ падає промінь світла під кутом $\alpha = 60°$. Частина світла відбивається від верхньої, а частина – від нижньої грані. Знайти відстань між сусідніми променями, відбитими від пластини.
Відповідь: $\Delta x = 7{,}06$ мм.

16.9 Промінь світла падає під кутом $\alpha = 30°$ на плоскопаралельну пластину з показником заломлення $n = 1{,}5$ і виходить паралельно падаючому променю, змістившись на $\Delta x = 1{,}95$ *см*. Знайти товщину пластини.
Відповідь: $d = 2{,}75$ *см*.

16.10 Оптична різниця ходу двох ітерферуючих хвиль монохроматичного світла дорівнює $\Delta = 0{,}3\lambda$. Визначити різницю фаз цих хвиль $\Delta\varphi$.
Відповідь: $\Delta\varphi = 0{,}6\pi$.

16.11 Скільки довжин хвиль N монохроматичного світла із частотою $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ *Гц* укладеться на шляху довжиною $l = 1{,}2\,мм$:
а) у вакуумі; б) у склі ($n = 1{,}5$)?
Відповідь: а) $N = 2 \cdot 10^3$; б) $N = 3 \cdot 10^3$.

16.12 На шляху монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}6\,мкм$ поміщена плоскопаралельна скляна пластинка товщиною $d = 0{,}1\,мм$. Світло падає на неї нормально. На який кут потрібно повернути пластину, щоб оптична довжина шляху змінилася на половину довжини хвилі?
Відповідь: $\alpha = 5°27'$.

16.13 На мильну плівку, яка міститься у повітрі, падає нормально пучок променів білого світла. При якій найменшій товщині плівки d відбите світло з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}55$ *мкм* виявиться максимально посиленим у результаті інтерференції? Показник заломлення плівки $n = 1{,}3$.

Відповідь: $d = 0{,}1$ *мкм*.

16.14 На екрані спостерігається інтерференційна картина в результаті накладення променів від двох когерентних джерел ($\lambda = 500$ *нм*). На шляху одного із променів перпендикулярно до нього помістили скляну пластинку ($n = 1{,}6$) товщиною $d = 5$ *мкм*. Визначити, на скільки смуг зміститься при цьому інтерференційна картина.

Відповідь: $m = 6$.

16.15 У досліді Юнга (інтерференція від двох точкових джерел) скляна пластинка товщиною 2 *см* міститься на шляху одного з інтерферуючих променів перпендикулярно до цього променя. На скільки можуть відрізнятися один від одного значення показника заломлення в різних місцях пластинки, щоб зміна різниці ходу від цієї неоднорідності не перевищувала 1 *мкм*?

Відповідь: $\Delta n = 5 \cdot 10^{-5}$.

16.16 Відстань між двома когерентними джерелами світла з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}5$ *мкм* дорівнює $d = 0{,}1$ *мм*. Відстань між інтерференційними смугами в середній частині екрана дорівнює $\Delta x = 1$ *см*. Знайти відстань від джерел до екрана.

Відповідь: $L = 2$ *м*.

16.17 На поверхні скла перебуває плівка води. На неї під кутом $\alpha = 30°$ до нормалі падає світло з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}68$ *мкм*. Знайти швидкість, з якою внаслідок випаровування зменшується товщина плівки, якщо за час $t = 15$ *хв* інтерференційна картина зміщується на одну смугу.

Відповідь: $\mathrm{v} = 0{,}3$ *нм/с*.

16.18 На екрані спостерігається інтерференційна картина від двох когерентних джерел світла з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}48$ *мкм*. Коли на шляху одного пучка помістили тонку пластину плавленого кварцу, інтерференційна картина змістилася на $N = 69$ смуг. Знайти товщину кварцової пластини.

Відповідь: $d = 72$ *мкм*.

16.19 На тонкий скляний клин (n = 1,55) падає нормально монохроматичне світло. Кут θ між поверхнями клина дорівнює $2'$. Визначити довжину світлової хвилі λ за умови, що відстань між сусідніми інтерференційними максимумами у відбитому світлі дорівнює $\Delta x = 0{,}3$ *мм*.

Відповідь: λ = 543 *нм*.

16.20 Між краями двох добре відшліфованих плоских пластинок поміщений тонкий дріт діаметром $d = 0{,}05$ *мм*, протилежні кінці пластинок щільно притиснуті одна до одної. Світло падає перпендикулярно до поверхні пластинки. На пластинці довжиною $l = 10$ *см* спостерігаються інтерференційні смуги, відстань між якими $\Delta x = 0{,}6$ *мм*. Визначити довжину хвилі світла.

Відповідь: λ = 0,6 *мкм*.

16.21 Плоско-опукла лінза своїм опуклим боком лежить на скляній пластині. Визначити товщину повітряного клина там, де у відбитому світлі з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}6$ *мкм* спостерігається перше світле кільце Ньютона.

Відповідь: $d = 0{,}15$ *мкм*.

16.22 Плоско-опукла лінза опуклим боком лежить на скляній пластині. Визначити товщину d шару повітря там, де у відбитому світлі з довжиною хвилі λ = 0,6 *мкм* спостерігається перше світле кільце Ньютона.

Відповідь: d = 0,15 *мкм*.

16.23 На скляну пластинку покладена опуклим боком плоско-опукла лінза. Радіус 5-го світлого кільця Ньютона у відбитому світлі дорівнює $r_5 = 5$ *мм*. Знайти радіус 3-го світлого кільця.

Відповідь: $r_3 = 3{,}73$ *мм*.

16.24 Установка для спостереження кілець Ньютона у відбитому світлі освітлюється монохроматичним світлом, яке падає нормально. Після того як простір між лінзою і скляною пластиною заповнили рідиною, радіуси темних кілець зменшилися у 1,12 раза. Знайти показник заломлення рідини.

Відповідь: $n = 1{,}56$.

16.25 Між скляною пластинкою та плоско-опуклою лінзою, що лежить на ній, налито рідину, показник заломлення якої менший за показник заломлення скла. Радіус восьмого темного кільця Ньютона при спостереженні у відбитому світлі $(\lambda = 700\,нм)$ дорівнює $r_8 = 2\,мм$. Радіус кривини лінзи $R = 1\,м$. Знайти показник заломлення рідини.

Відповідь: $n = 1,4$.