

Лабораторна робота 1.3

ПЕРЕВІРКА ОСНОВНОГО РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ЗА ДОПОМОГОЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

1 МЕТА РОБОТИ

- Експериментальна перевірка основного рівняння динаміки оберտального руху.
- Оцінка сили тертя та її впливу на точність результатів вимірювань.

2 КОМПЛЕКТАЦІЯ УСТАНОВКИ

1	Маятник Обербека.	4	Масштабна лінійка.
2	Лічильник-секундомір.	5	Терези з важками.
3	Штангенциркуль.	6	Набір вантажів.

3 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ОПИС УСТАНОВКИ

ОСНОВНІ КІНЕМАТИЧНІ ВЕЛИЧИНИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

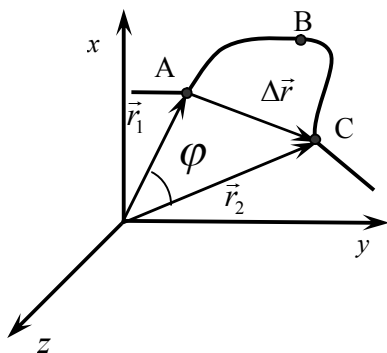


Рисунок - 3.6 - Криволінійна траєкторія ABC руху матеріальної точки

У випадку, коли траєкторія руху тіла є кривою лінією, рух називається **криволінійним**. Для характеристики криволінійного руху використовують такі кінематичні характеристики: кутове переміщення, кутова швидкість, кутове прискорення, частота і період обертання. **Кутовим переміщенням** $\vec{\varphi}$ називають псевдовектор, модуль якого дорівнює куту, на

який повернувся радіус-вектор точки \vec{r} за проміжок часу Δt . Напрямок кутового переміщення визначається за допомогою правила правого гвинта (свердлика). Одиницею вимірювання кутового прискорення є радіан: $|\varphi| = 1 \text{ рад}$. Між лінійним і кутовим переміщеннями існує зв'язок:

$$\Delta \vec{r} = [\vec{\varphi} \times \vec{r}], \quad (3.1)$$

тобто лінійне переміщення дорівнює векторному добутку кутового переміщення на радіус-вектор матеріальної точки.

Кутова швидкість ($\vec{\omega}$) показує, як змінюється кут повороту радіус-вектора точки за одиницю часу:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (3.2)$$

У випадку руху тіла із сталою кутовою швидкістю

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \quad (3.3)$$

Одиницею вимірювання кутової швидкості є радіан за секунду: $[\omega] = 1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Між лінійною (\vec{v}) і кутовою ($\vec{\omega}$) швидкостями існує зв'язок

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}], \quad (3.4)$$

тобто лінійна швидкість дорівнює векторному добутку кутової швидкості на радіус-вектор матеріальної точки. Кутова швидкість також є псевдовектором і визначається за правилом правого гвинта.

Кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ показує, як змінюється кутова швидкість з часом і дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кутового переміщення:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \quad (3.5)$$

Одиницею вимірювання кутового прискорення є радіан у секунду в квадраті: $[\varepsilon] = 1 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$. Між лінійним (\vec{a}) і кутовим ($\vec{\varepsilon}$) прискореннями існує зв'язок

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}]. \quad (3.6)$$

Лінійне прискорення дорівнює векторному добутку кутового прискорення радіус-вектора матеріальної точки.

Рівномірний рух по колу – це найбільш простий вид криволінійного руху. Час, протягом якого матеріальна точка здійснює один оберт, називається **періодом обертання**

$$T = \frac{t}{N}, \quad (3.7)$$

де N - число повних обертів. Тому, у випадку рівномірного руху по колу кутова швидкість дорівнює

$$\omega = 2\pi/T. \quad (3.8)$$

Число повних оборотів за одиницю часу називається **частотою** :

$$v = \frac{N}{T}. \quad (3.9)$$

Таким чином, період і частота – взаємно обернені величини:

$$T = \frac{1}{\nu} \quad \text{і} \quad \nu = \frac{1}{T}. \quad (3.10)$$

Кутова швидкість пов'язана з частотою співвідношенням:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (3.11)$$

Одиницями вимірювання періоду є $[T] = 1 \text{ с}$ і частоти $[\nu] = 1 \text{ с}^{-1} = 1 \text{ Гц}$. Можна визначити лінійну швидкість рівномірного руху точки по колу $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, тоді:

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \quad (3.12)$$

де R - радіус кола.

ОСНОВНІ ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

У випадку, коли тіло не є матеріальною точкою, ефективність дії сили залежить не тільки від її величини, але й від відстані від осі обертання до напрямку дії даної сили (див. рис. 3.7). Для характеристики дії сили у випадку обертального руху вводять поняття моменту сили. **Момент сили** позначають буквою \vec{M} . Момент сили – це псевдовектор, який характеризується не тільки модулем, але і напрямком. **Момент сили** дорівнює век-

торному добутку радіус-вектора \vec{r} , проведеного з точки обертання до точки прикладення сили на силу, яка діє на тіло

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (3.13)$$

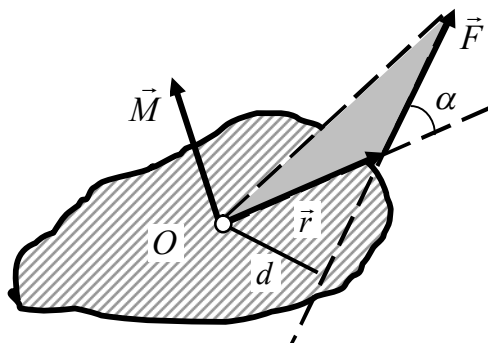


Рисунок 3.7 - Момент сили

Напрямок вектора моменту сили визначається за допомогою **правила правого гвинта**. Він спрямований перпендикулярно до площини векторів \vec{r} і \vec{F} .

Модуль моменту сили дорівнює добутку довжини радіуса-вектора і нормальної складової сили до цього вектора $F_n = F \sin \alpha$

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = r \cdot d, \quad (3.14)$$

де d - **плече сили**.

Геометрично **плече сили** є найкоротшою відстанню від точки обертання до напрямку дії сили (див. рис. 3.7).

Одиницею вимірювання моменту сили є $[M] = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Моментом імпульсу \vec{L} матеріальної точки відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіус-вектора \vec{r} матеріальної точки, проведеного з точки O , на імпульс цієї матеріальної точки $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]. \quad (3.15)$$

Момент імпульсу дорівнює добутку моменту інерції I на кутову швидкість $\vec{\omega}$:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad (3.16)$$

Одиницею вимірювання моменту імпульсу є $[L] = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Для характеристики інертності системи при обертальному русі вводять момент інерції I . **Моментом інерції** системи відносно осі обертання називається величина, що дорівнює сумі добутків мас m_i , які утворюють механічну систему, на квадрати їх відстаней r_i від даної осі:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (3.17)$$

У випадку однорідного тіла підрахувати момент інерції можна за формулою

$$I = \rho \int_V r^2 dV, \quad (3.18)$$

де ρ - густина тіла, V - його об'єм. Одиницею вимірювання моменту інерції є $[I] = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

ОСНОВНИЙ ЗАКОН ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

Основний закон динаміки обертального руху є аналогом II закону Ньютона в застосуванні до обертання абсолютно твердо-

го тіла. **Абсолютно твердим тілом** називається тіло, яке не піддається пластичним деформаціям, тобто не змінює ні своєї форми, ні своїх розмірів під дією зовнішніх сил.

Обертальним рухом називається рух, при якому всі точки тіла рухаються по концентричним колам. Геометричне місце точок, які є центрами цих кіл називається **віссю обертання** твердого тіла.

Основний закон динаміки обертального руху в інтегральній формі: кутове прискорення дорівнює відношенню моменту сил до моменту інерції тіла

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}, \quad (3.19)$$

де I - момент інерції твердого тіла; $\vec{\varepsilon}$ - кутове прискорення.

У диференціальній формі основний закон динаміки обертального руху: момент сили дорівнює швидкості зміни моменту імпульсу тіла \vec{L}

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (3.20)$$

ОПИС ЛАБОРАТОРНОЇ УСТАНОВКИ

Співвідношення (3.19) легко перевірити за допомогою **маятника Обербека** (рис. 3.8). Розглянемо принцип його дії. Вантаж m під час падіння, за допомогою нитки розкручує шків радіуса r , з яким скріплені однакові стрижні з однаковими циліндричними вантажами з масою m_0 кожний. Переміщуючи ці вантажі уздовж стрижнів, можна змінювати момент інерції системи I . У випадку, коли вантажі зафіксовані, $I = const$. При падінні вантажу m з висоти H його потенціальна енергія mgH витрачається на збільшення кінетичної енергії вантажу $mv^2/2$, кінетичної енергії обертального руху маятника $I\omega^2/2$, а також на ви-

конання роботи з подолання тертя в опорах $A_{\text{тер}} = F_{\text{тер}}H$. Закон збереження енергії в цьому випадку набуде вигляду

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + F_{\text{тер}}H. \quad (3.21)$$

При зворотному русі за рахунок енергії маятника вантаж підніметься на висоту h , тому робота сил тертя дорівнює $A_{\text{тер}} = F_{\text{тер}}(H + h) = mgH - mgh$, звідки

$$F_{\text{тер}} = mg \frac{H - h}{H + h}. \quad (3.22)$$

Підставляючи (3.22) у (3.21) і враховуючи, що $\omega = v/r$ і $v = at = 2H/t$, маємо:

$$I = \frac{md^2}{4} \left[gt^2 \frac{h}{H(H + h)} - 1 \right], \quad (3.23)$$

де $d = 2r$ – діаметр шківів.

Оскільки лінійне прискорення вантажу $a = 2H/t^2$, а кутове прискорення $\varepsilon = a/r$, то

$$\varepsilon = \frac{4H}{dt^2}. \quad (3.24)$$

Для визначення моменту сил M , що діють на систему, потрібно розглянути рух вантажу m під дією сили тяжіння $m\vec{g}$ і натягу нитки \vec{T} . Відповідно до другого закону Ньютона з урахуванням напрямків сил одержимо: $mg - T = ma$, звідки $T = m(g - a)$. Момент сили тертя $M_{\text{тер}} = f_{\text{тер}}r$ спрямований в

бік, протилежний моменту сили натягування нитки, $M = Tr$, тому сумарний момент, що діє на систему, дорівнює

$$M = Tr - f_{\text{тер}} r = mr(g - a) - mg \frac{H - h}{H + h}.$$

З урахуванням виразів для a і r , маємо

$$M = md \left(g \frac{h}{H + h} - \frac{H}{t^2} \right). \quad (3.25)$$

Отже, коли ми визначимо час t падіння вантажу масою m з висоти H , висоту його підйому h при зворотному русі і діаметр шківів d , то можемо знайти усі величини, що входять у співвідношення (3.19) і перевірити його справедливність.

ВПЛИВ МОМЕНТУ СИЛ ТЕРТЯ

Якщо маятник у початковий момент обертається з кутовою швидкістю ω_0 , до зупинки він повернеться на кут φ , який легко визначити з формули

$$A_{\text{тер}} = \frac{1}{2} I \omega_0^2 = M_{\text{тер}} \varphi, \quad (3.26)$$

де $\frac{1}{2} I \omega_0^2$ - початкова кінетична енергія обертового тіла; $A_{\text{тер}}$ - робота сил тертя.

У формулі (3.26) вважається, що момент сил тертя є сталою величиною і пов'язаний з кутовим прискоренням співвідношенням

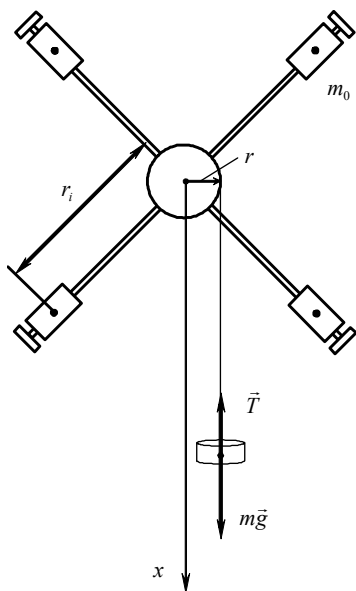


Рисунок 3.8 -
Маятник Обербека

$$M_{\text{тер}} = I\varepsilon_0, \quad (3.27)$$

де ε_0 - прискорення обумовлене тільки моментом сил тертя. З (3.26) і (3.27) знаходимо

$$\omega_0^2 = 2\varepsilon_0\varphi. \quad (3.28)$$

Нехай N - число обертів, які виконує маятник до зупинки, T_0 - період обертання маятника на початку руху. Тоді $\varphi = 2\pi N$, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ і з урахуванням (3.28) отримаємо

$$\varepsilon_0 = \frac{\pi}{(NT_0^2)}. \quad (3.29)$$

Звідси можна зробити висновок, як дослідним шляхом визначити ε_0 : потрібно визначити час, за який виконується перший оберт, а також число обертів N маятника до зупинки.

4 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

. ПІДГОТОВКА ДО РОБОТИ.

- 1.1** Включити секундомір і прогріти його протягом 3 хв.
- 1.2** Виміряти штангенциркулем діаметр шківів маятника Обербека.
- 1.3** Збалансувати маятник, щоб він залишався нерухомим в будь-якому положенні.
- 1.4** Встановити нижній датчик секундоміра таким чином, щоб вантаж збивав його пластинку в момент повного розмотування нитки, а верхній датчик на висоті 100-120 см від нижнього.
- 1.5** Встановити пластинки датчиків горизонтально, натиснути клавішу "Сброс" і перевірити чи відбувається вмикання і вимикання секундоміра при опусканні пластинок.

2 ПЕРЕВІРКА ЗАЛЕЖНОСТІ $\varepsilon \sim M$ (при $I = const$).

2.1 Підвісити вантаж m до вільного кінця нитки і, намотуючи нитку на шків, підняти вантаж до верхнього датчика.

2.2 Відпустити вантаж і визначити час t його падіння з висоти H , а також висоту підняття вантажу h при зворотному русі (відлік вести від пластинки нижнього датчика). Дослід повторити п'ять разів, дані занести в таблицю 1.

Знайти середнє значення $\langle t_1 \rangle$ і $\langle h_1 \rangle$.

2.3 Замінити вантаж m_1 на m_2 , виконати з ним ті самі вимірювання, занести дані в таблицю 1, знайти $\langle t_2 \rangle$ і $\langle h_2 \rangle$.

2.4 За формулами (3.24) і (3.25) підрахувати ε_1 , ε_2 , M_1 , M_2 .

ТАБЛИЦЯ 1 - ПЕРЕВІРКА ЗАЛЕЖНОСТІ $\varepsilon \sim M$

Діаметр шківа $d =$		Висота підняття вантажу $H =$					Середнє значення
маса вантажу, кг	час падіння і висота підняття вантажу	номер досліду					
		1	2	3	4	5	
$m_1 =$	t_1						
	h_1						
$m_2 =$	t_2						
	h_2						

2.5 Визначити відношення $\frac{\langle M_1 \rangle}{\langle M_2 \rangle}$ та $\frac{\langle \varepsilon_1 \rangle}{\langle \varepsilon_2 \rangle} = \left(\frac{\langle t_2 \rangle}{\langle t_1 \rangle} \right)^2$. Порівняти

їх. Зробити висновок.

2.6 Визначити похибку перевірки залежності $\varepsilon \sim M$ за формулою

$$\delta = \left| \frac{\varepsilon_1/\varepsilon_2 - M_1/M_2}{M_1/M_2} \right| 100\%.$$

3 ПЕРЕВІРКА ЗАЛЕЖНОСТІ $\varepsilon \sim 1/I$ ($M = const$)

3.1 Виконати дії пп. 2.1 і 2.2. Занести відповідні результати в таблицю 2.

3.2 Змінити момент інерції маятника, змінивши відстань від вантажів m_0 , до осі обертання маятника. Закріпити вантажі, збалансувати маятник.

3.3 Виконати вимірювання відповідно до пп. 2.1 і 2.2. Знайти середнє значення $\langle t_3 \rangle$ і $\langle h_3 \rangle$.

3.4 За формулами (3.44) і (3.43) знайти значення ε_1 , ε_3 , I_1 , I_3 відповідно для значень $\langle t_1 \rangle$, $\langle h_1 \rangle$, $\langle t_3 \rangle$, $\langle h_3 \rangle$.

ТАБЛИЦЯ 2 - ПЕРЕВІРКА ЗАЛЕЖНОСТІ $\varepsilon \sim 1/I$

Момент інерції вантажу	Час падіння і висота підняття вантажу	Номер досліджу					Середнє значення
		1	2	3	4	5	
$I_1 =$	t_1						
	h_1						
$I_2 =$	t_3						
	h_3						

3.5 Визначити відношення $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} = \left(\frac{t_3}{t_1} \right)^2$ та $\frac{I_1}{I_2}$. Порівняти їх.

Зробити висновок.

3.6 Визначити похибку перевірки залежності $\varepsilon \sim \frac{1}{I}$ за формулою

$$\delta' = \frac{|\varepsilon_1/\varepsilon_3 - I_2/I_1|}{I_2/I_1} 100\% .$$

4 ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ СИЛИ ТЕРТЯ

4.1 Визначити мінімальну масу m_0 , при якій маятник починає обертатися. Підрахувати силу тертя

$$F_{\text{тер}} = m_0 g .$$

4.2 Оцінити значення моменту сил тертя із співвідношення:

$$M_{\text{тер}} \approx m_0 g r ,$$

де r - радіус шківів. Результат занести в таблицю 3.

4.3 Знайти прискорення ε_0 , яке виникає під дією моменту сили тертя. Для цього потрібно змусити маятник обертатися. Визначити час T_0 , за який він виконує перший оберт, і повне число обертів N маятника до зупинки. Потім за формулою

$$\varepsilon_0 = \frac{\pi}{(NT_0^2)}$$

визначити ε_0 . Результат занести в таблицю 3.

4.4 Повторити вимірювання за пунктами 4.1 і 4.2 три рази. Дані занести в таблицю 3.

4.5 За формулою

$$F_{\text{тер}} = mg \frac{H - h}{H + h}$$

визначити силу тертя. Порівняти отриманий результат з результатом п. 4.1. Зробіть висновок.

ТАБЛИЦЯ 3 - ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ СИЛИ ТЕРТЯ

	Номер досліду			Середнє значення	δ
	1	2	3		
m_0					
T_0					
N					
ε_0					

5 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Дати визначення кінематичних характеристик обертального руху ($\bar{\varphi}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$). Зазначте їх зв'язок з відповідними лінійними величинами. Як визначається їх напрямок? Одиниці вимірювання цих величин.

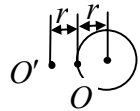
2 Дати визначення динамічних характеристик обертального руху (I , \bar{M} , \bar{L}). Як визначається їх напрямок? Одиниці вимірювання.

3 Дати визначення динамічних характеристик обертального руху (I , \bar{M} , \bar{L}). Як вони пов'язані з відповідними величинами поступального руху?

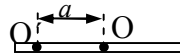
4 Сформулювати та записати основне рівняння динаміки обертального руху в інтегральній і диференціальній формах.

5 Будова маятника Обербека, принцип його дії.

6 Визначити момент інерції однорідного диска маси m і радіуса R відносно осей, що проходять через точки O і O' перпендикулярно до його площини.



7 Визначити момент інерції однорідного стрижня маси m і довжини l відносно осей, що проходять через точки O і O' перпендикулярно до його площини ($a = \frac{2}{5}l$).



8 Момент імпульсу. Сформулювати закон збереження моменту імпульсу.

9 Як визначити повну механічну енергію твердого тіла?

10 Чому дорівнює відношення кінетичних енергій поступального і обертального руху циліндра, який скочується без ковзання з похилої площини?

11 Назвати фактори, що визначають похибку вимірювань у даній роботі.

6 СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельєв І.В. Курс фізики. - М.:Наука,1989.- Т.1.
2. Пономаренко В.І., Ільїн Ю.М. Курс общей фізики. - К.:ВИПОЛ,1997. - Т.1.
3. Черняк Л.М. Лекції з загальної фізики. – Суми: Вид-во Алан – ЕКС, 2003. книга 1.
4. Загальна фізика. Лабораторний практикум. За ред. Горбачука. - Київ: Вища школа, 1990.
5. Детлаф А.А., Яворський., Б.М. Курс фізики. – М.: Высшая школа, 1989.